ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

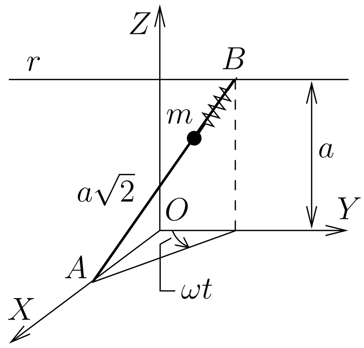
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (23 de noviembre de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Una varilla AB sin masa y longitud $a\sqrt{2}$ se mueve de forma que su extremo A desliza sobre el eje OX y el otro extremo B sobre una recta horizontal r que se encuentra en el plano OYZ a una altura a. A su vez, una partícula pesada de masa m se mueve en todo momento a lo largo de la varilla con ligadura bilateral lisa unida al extremo B a través de un resorte de constante k y longitud natural nula.
La varilla tiene un movimiento impuesto tal que en un instante genérico el ángulo entre su proyección horizontal y el eje OY vale ωt, tal y como muestra la figura adjunta.



Se supone que no existe rozamiento entre ninguno de los elementos móviles del sistema, y que la partícula no alcanza ninguno de los dos extremos de la varilla durante el movimiento. Se pide:

1. Ecuación diferencial del movimiento de la partícula relativo a la varilla AB.
2. Determinar el valor mínimo de k para que este movimiento sea oscilatorio.
3. Expresión de la reacción de la varilla sobre la partícula en un instante genérico.

⋆

1. El movimiento de la partícula sobre la varilla queda completamente determinado mediante un único parámetro, que se elige como la distancia s entre la partícula y el extremo B.

Una forma de calcular la aceleración absoluta de la partícula es emplear un sistema móvil auxiliar $(C; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ que acompañe a la varilla y gire alrededor de la vertical con velocidad angular ω, siendo C la proyección de B sobre el eje Y, mediante la relación:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} \quad . \qquad (1)$$

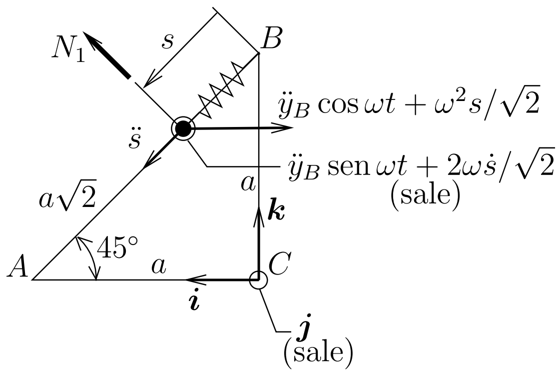


Figura 1: *Alzado con el plano vertical que contiene a la varilla en verdadera magnitud, mostrando la aceleración de la partícula y la reacción* $\boldsymbol{N}_1$

Teniendo en cuenta que $y_B = a\cos\omega t$, y que la aceleración del extremo B se expresa como $\ddot{\boldsymbol{y}}_B = \ddot{y}_B \boldsymbol{J} = \ddot{y}_B(\operatorname{sen}\omega t\ \boldsymbol{j} - \cos\omega t\ \boldsymbol{i})$, los distintos términos de (1) se expresan:

$$\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = \frac{\ddot{s}}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{a}_{\text{arr}} = -\left(\ddot{y}_B \cos\omega t + \omega^2 s \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{i} + \ddot{y}_B \operatorname{sen}\omega t \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\omega\dot{s}\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

Como la varilla es lisa, el principio de cantidad de movimiento según la propia varilla proporciona la ecuación diferencial buscada:

$$mg\frac{1}{\sqrt{2}} - ks = m\left[\ddot{s} - \left(\ddot{y}_B \cos\omega t + \omega^2 s\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Teniendo en cuenta que $y_B = a\cos\omega t$ y por tanto $\ddot{y}_B = -a\omega^2\cos\omega t$, la ecuación diferencial del movimiento resulta:

$$\ddot{s} + \left(\frac{k}{m} - \frac{\omega^2}{2}\right)s = \frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{a\omega^2}{\sqrt{2}}\cos^2\omega t \tag{2}$$

2. La expresión (2) corresponde a un movimiento armónico forzado siempre que el coeficiente de s sea positivo, por lo que el $k_{\min}$ resulta:

$$k_{\min} = \frac{m\omega^2}{2}$$

3. Planteando el principio de cantidad de movimiento en dirección perpendicular a la varilla es posible obtener la reacción. Llamando N_1 a la componente de esta reacción contenida en el plano definido por los versores $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k})$ y N_2 a la componente perpendicular a éste (según $\boldsymbol{j}$), resulta:

$$N_1 = \frac{m}{\sqrt{2}}\left[g + \omega^2\left(a\cos^2\omega t - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$N_2 = m\omega\left(-a\omega\cos\omega t\operatorname{sen}\omega t + 2\dot{s}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$