Mecánica

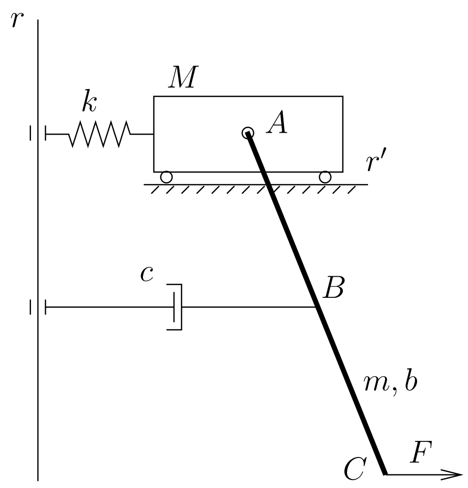
EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (21 de enero de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/25-parcial; 10/45-final) Tiempo: 60 min.

Un sistema está formado por un carro pesado de masa M y una barra pesada AC de masa m y longitud b que se encuentra articulada en A a aquél como muestra la figura adjunta.

El carro se apoya sobre una recta horizontal fija y lisa r' y está unido a una recta vertical fija r a través de un resorte elástico de constante k. Por otro lado, el centro B de la barra se encuentra unido a la misma recta fija a través de un amortiguador lineal de constante c. Además, en el extremo C de la barra actúa una fuerza horizontal constante F. Se supone que el sistema se mueve siempre en un plano vertical fijo, que no existe rozamiento entre ninguna de las partes móviles y que tanto el muelle como el amortiguador se mantienen siempre horizontales.



Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Discusión sobre la existencia de integrales primeras.
3. Expresión de la reacción que ejerce la recta horizontal r' sobre el carro.

⋆

1.— El sistema tiene dos grados de libertad, que tomaremos como x (elongación del resorte respecto de su longitud natural) y θ (ángulo de la varilla con la vertical). La Lagrangiana que incluye la energía cinética y el potencial de las fuerzas conservativas (peso, F y $-kx$) es

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + b\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{4}b^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{24}mb^2\dot{\theta}^2 + mg\frac{b}{2}\cos\theta + F(x + b\operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{6}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mg\frac{b}{2}\cos\theta + F(x + b\operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{2}kx^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Esta Lagrangiana no incluye las fuerzas disipativas del amortiguador, cuyo trabajo virtual nos permite identificar las fuerzas generalizadas correspondientes:

$$\delta W = -c(\dot{x} + \frac{b}{2}\dot{\theta}\cos\theta)(\delta x + \frac{b}{2}\delta\theta\cos\theta) = Q_x\delta x + Q_\theta\delta_\theta,$$

de donde

$$Q_x = -c(\dot{x} + \frac{b}{2}\dot{\theta}\cos\theta); \quad Q_\theta = -c(\dot{x} + \frac{b}{2}\dot{\theta}\cos\theta)\frac{b}{2}\cos\theta. \tag{2}$$

Derivando la Lagrangiana (1) e incluyendo las fuerzas del amortiguador (2), resultan las ecuaciones de Lagrange:

$$(M+m)\ddot{x} + m\frac{b}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta) + kx - F = -c(\dot{x} + \frac{b}{2}\dot{\theta}\cos\theta); \tag{3}$$

$$m\frac{b}{2}\ddot{x}\cos\theta + \frac{1}{3}mb^2\ddot{\theta} + mg\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta - Fb\cos\theta = -c(\dot{x} + \frac{b}{2}\dot{\theta}\cos\theta)\frac{b}{2}\cos\theta. \tag{4}$$

2.— El amortiguador disipa energía, por lo que esta magnitud no se conserva, no existe una integral primera de energía, ya que la integral de Jacobi sólo se plantea en los casos en que las fuerzas derivan de un potencial. Por otra parte, tampoco las coordenadas no son cíclicas, por lo que no se observan integrales primeras.

3.— Las únicas fuerzas verticales son la reacción N de r' y los pesos, por lo que la ecuación de la dinámica en dirección vertical resulta:

$$N = (M+m)g + m\frac{b}{2}(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta). \tag{5}$$