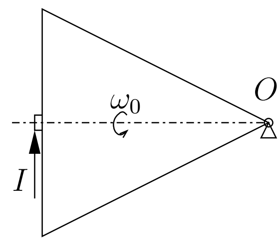
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (21 de enero de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sólido rígido homogéneo de masa M tiene forma de cono recto con base circular de radio R y altura H, estando su vértice fijo en un punto O mediante una articulación esférica. Inicialmente se encuentra con su eje de revolución en reposo y horizontal, girando con velocidad angular ω_0 alrededor del mismo. En ese instante se aplica una percusión vertical I en un pequeño resalte situado en el centro de la base. Se pide:



1. Determinar el campo de velocidades del sólido inmediatamente después de la percusión.
2. Expresión de la percusión reactiva en O
3. Después de la percusión el sólido queda en movimiento, sometido a su peso y con el punto fijo O. Expresar la energía mecánica total del sistema en función exclusivamente del ángulo que forma el eje del cono con la vertical, indicando si esta energía se conserva o no. ¿Sería posible que en este movimiento el eje del cono alcance en algún momento la posición vertical?

1.— Para calcular el campo de velocidades inmediatamente después de la percusión basta con expresar el balance del momento cinético respecto del punto fijo O:

$$\boldsymbol{H}_{O_2} - \boldsymbol{H}_{O_1} = \boldsymbol{r}_{OA} \wedge \boldsymbol{I} \qquad , \tag{1}$$

siendo A el punto de aplicación de la percusión $\boldsymbol{I}$. Para expresar estas magnitudes empleamos un sistema ortonormal fijo $(O; \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1)$, de forma que el versor $\boldsymbol{k}_1$ coincide con el eje del cono, el $\boldsymbol{j}_1$ es vertical y el $\boldsymbol{i}_1$ es horizontal formando un triedro a derechas con los dos anteriores. Llamando $\boldsymbol{\Omega}_1$ y $\boldsymbol{\Omega}_2$ a los vectores velocidad de rotación antes y después de la percusión respectivamente, la relación (1) se expresa como:

$$\boldsymbol{I}_O(\boldsymbol{\Omega}_2 - \boldsymbol{\Omega}_1) = HI\,\underbrace{(\boldsymbol{k}_1 \wedge \boldsymbol{j}_1)}_{-\boldsymbol{i}_1} \ . \tag{2}$$

Teniendo en cuenta las componentes de las velocidades de rotación y del tensor de inercia en O en el sistema de referencia anteriormente descrito:

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = (0, 0, \omega_0) \qquad \boldsymbol{\Omega}_2 = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) \qquad \boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \ ,$$

con $A = (3/20)M(R^2 + 4H^2)$ y $C = (3/10)MR^2$, la expresión (2) proporciona las componentes de la velocidad de rotación inmediatamente después de la percusión:

$$\Omega_x = -IH/A \quad , \qquad \Omega_y = 0 \quad , \qquad \Omega_z = \omega_0 \ . \tag{3}$$

2.— La percusión reactiva $\boldsymbol{P}$ en O puede obtenerse mediante el balance de cantidad de movimiento $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\boldsymbol{\Phi}_2 - \boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{P} \ . \tag{4}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{0}$ y que $\boldsymbol{\Phi}_2 = M\boldsymbol{v}_G = M(\boldsymbol{\Omega}_2 \wedge \boldsymbol{r}_{OG})$, a partir de la expresión (4) es posible obtener las componentes (P_x, P_y, P_z) de la percusión reactiva:

$$P_x = 0 \ , \qquad P_y = I\left(\frac{MH\ell}{A} - 1\right) = I\,\frac{H^2 - R^2}{R^2 + 4H^2} \ , \qquad P_z = 0 \ ,$$

siendo $\ell = |\boldsymbol{OG}| = 3H/4$.

3.— El sistema tiene tres grados de libertad que se representan mediante el ángulo de precesión ψ del eje del cono alrededor de la vertical, el ángulo de nutación θ que forma dicho eje con la vertical, y el giro propio φ alrededor del mismo eje. Adicionalmente se emplea un sistema de referencia móvil intermedio $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, de forma que el versor $\boldsymbol{k}$ coincide en todo momento con el eje del cono, el versor $\boldsymbol{i}$ se mantiene siempre horizontal y el $\boldsymbol{j}$ es perpendicular a los dos anteriores (figura adjunta).

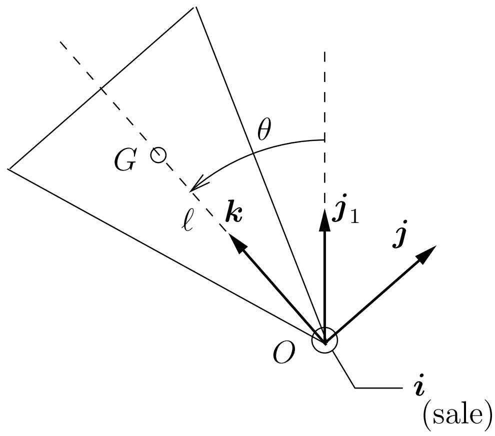


Figura 1: *Vista de la configuración genérica del movimiento posterior a la impulsión, con el eje del cono en verdadera magnitud*

La energía mecánica total se conserva en el movimiento posterior a la percusión, puesto que todas las fuerzas que trabajan son conservativas. Denotando por $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ al vector velocidad de rotación en una configuración genérica expresado en el sistema móvil, la energía en un instante genérico se expresa:

$$E = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega}) + V = \frac{1}{2}\left[A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2\right] + Mg\ell\cos\theta \quad , \tag{5}$$

donde se ha tomado como origen de potencial gravitatorio el plano horizontal que pasa por O. Por otro lado, la energía mecánica total inmediatamente después de la percusión (E_0) vale:

$$E_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_2\cdot(\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{I^2H^2}{A} + C\omega_0^2\right) \quad ,$$

que igualada con (5) permite obtener una primera relación:

$$\frac{1}{2}\left[A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2\right] + Mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{I^2H^2}{A} + C\omega_0^2\right) \tag{6}$$

Por otro lado, se conservan las componentes del momento cinético $\boldsymbol{H}_O$ según la vertical fija (versor $\boldsymbol{j}_1 = \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$) y según el eje del cono (versor $\boldsymbol{k}$):

$$\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{j}_1 = (\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{j}_1 = A\omega_y\operatorname{sen}\theta + C\omega_z\cos\theta = \text{cte.} \tag{7}$$

$$= C\Omega_z\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{k} = C\omega_z = \text{cte.} \qquad (8)$$
$$= C\Omega_z = C\omega_0$$

De las expresiones (7) y (8) se pueden eliminar las componentes ω_z y ω_y:

$$\omega_z = \omega_0 \ , \qquad \omega_y = -\frac{C\omega_0}{A\tan\theta} \ ,$$

que introducidas en (6) permiten expresar la componente ω_x en función exclusivamente de los datos del problema y de la nutación θ:

$$\omega_x^2 = \frac{1}{A}\left[\frac{I^2H^2}{A} - 2Mg\ell\cos\theta - \frac{C^2\omega_0^2}{A\tan^2\theta}\right] \ . \qquad (9)$$

Tal y como pide el enunciado, es posible justificar con la ayuda de (9) que el cono nunca puede alcanzar la posición vertical ($\theta = 0$), ya que, al ser en cualquier caso ω_x finito, para $\theta \to 0$ la percusión asociada tendría que valer $I \to \infty$. Sin embargo, si el cono no tuviera la rotación propia inicial (es decir, $\omega_0 = 0$) entonces sí se podría alcanzar la vertical, valiendo entonces la percusión mínima necesaria $I = \frac{3}{2}M\left[\frac{1}{10}(R^2/H^2 + 4)gH\right]^{1/2}$.