Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL Y EXAMEN FINAL ORDINARIO (6 de Junio de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (parcial y final) (puntuación: 5/25 ó 7,5/45) Tiempo: 30 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

A partir del principio de los trabajos virtuales, *desarrollar* las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sólido rígido en el caso más general posible. *Deducir* a partir del resultado anterior las denominadas *ecuaciones cardinales* de la estática. *Explicar mediante un contraejemplo* porqué dichas ecuaciones no son suficientes en general para el equilibrio si el sólido no es rígido sino deformable.

El Principio de los Trabajos Virtuales establece que la condición necesaria y suficiente para el equilibrio de cualquier sistema material es que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea nulo, para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \ ; \quad \forall \delta \boldsymbol{r}_i \text{compatibles.}$$

Si el sistema material es rígido, tomaremos desplazamientos virtuales compatibles con la condición de indeformabilidad del sólido, que deberán cumplir una relación similar a la del campo de velocidades (que pueden ser consideradas como «velocidades virtuales compatibles»): $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_i$, por lo que los desplazamientos virtuales compatibles cumplirán: $\delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{r}_O + \delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}_i$. El Teorema expresa:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_O + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}_i) = \delta \boldsymbol{r}_O \cdot \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i + \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{f}_i \ ;$$

denominando: $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i^{\text{ext}} = \boldsymbol{F}$; $\quad \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{f}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{f}_i^{\text{ext}} = \boldsymbol{M}_O$, se llega a:

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{M}_O \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \ .$$

Como tanto $\delta \boldsymbol{r}_O$ como $\delta \boldsymbol{\varphi}$ pueden tomar valores arbitrarios, se deduce que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio del sólido rígido son:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0} \ ,$$

que son las denominadas ecuaciones cardinales de la estática.

Que estas condiciones no son suficientes en general para el equilibrio, puede verse con un sencillo contraejemplo. Consideremos un sólido constituido por dos barras unidas entre sí en forma de «L» y sometidas a dos fuerzas F iguales y opuestas, como se ve en la figura. Si las barras están soldadas (sólido rígido) las ecuaciones cardinales son suficientes. Si están articuladas (conjunto deformable) no lo son, como resulta obvio.