

Mecánica

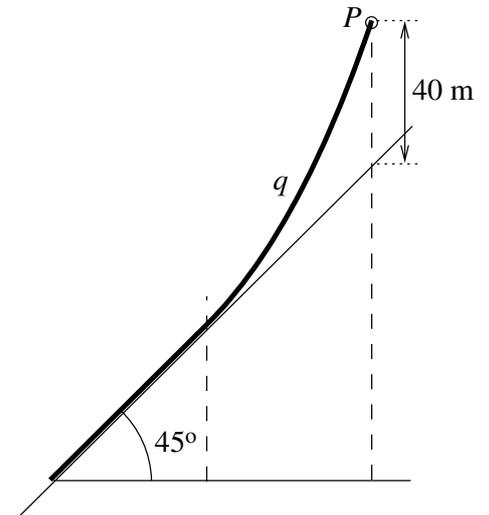
4.º EXAMEN PARCIAL Y EXAMEN FINAL ORDINARIO (6 de Junio de 2003)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 3.º (parcial) ó 5.º (final) (puntuación: 10/25 ó 10/45)

Tiempo: 60 min.

Un hilo homogéneo de peso q por unidad de longitud está fijo a un punto P por un extremo, mientras que el resto cuelga libremente apoyándose además sobre un plano inclinado liso que pasa por debajo de P a una distancia vertical de 40 m. La longitud total del hilo es de 200 m y el plano inclinado forma 45° con la horizontal, con longitud suficiente para que el resto del hilo esté apoyado sobre él. Se pide:



1. Expresar las ecuaciones algebraicas que permiten obtener la configuración de equilibrio, indicando claramente las incógnitas a resolver, y reducir estas ecuaciones a su forma más simplificada posible;
2. Resolver dichas ecuaciones para obtener la configuración de equilibrio;
3. Determinar la tensión máxima en el hilo, así como la longitud del mismo que se apoya sobre el plano.

1.— Denominamos Q al extremo inferior del hilo, y M al punto donde se levanta del plano. El hilo forma una catenaria entre M y P , de la cual conocemos de entrada la tangente en M :

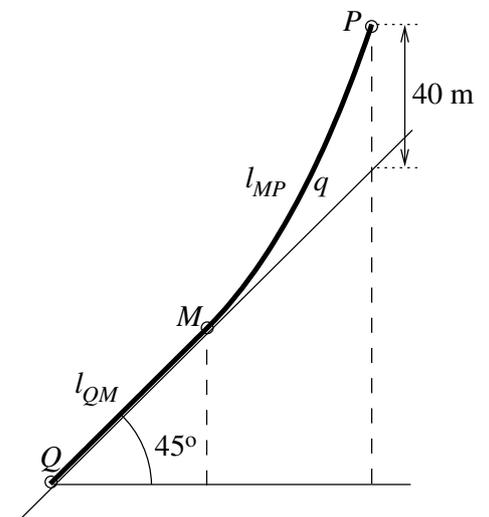
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{sh} \frac{x_M}{a} \Rightarrow \frac{x_M}{a} = \alpha_M = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2}),$$

donde empleamos la notación $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x/a$ para simplificar la escritura en lo sucesivo. Por otra parte, la tensión en M procede del trozo de hilo l_{QM} apoyado:

$$ql_{QM} \frac{\sqrt{2}}{2} = qa \operatorname{ch} \alpha_M = qa\sqrt{2} \Rightarrow l_{QM} = 2a.$$

Para conocer la configuración del hilo nos faltan por determinar el parámetro a y la abscisa x_P , o bien $\alpha_P = x_P/a$. Para ello necesitamos dos ecuaciones, en primer lugar la diferencia de ordenadas entre M y P :

$$\begin{aligned} a \operatorname{ch} \alpha_P - a \operatorname{ch} \alpha_M &= (x_P - x_M) \operatorname{tg} 45^\circ + 40 \\ &\Downarrow \\ \operatorname{ch} \alpha_P - \operatorname{ch} \alpha_M &= (\alpha_P - \alpha_M) + \frac{40}{a}. \end{aligned} \tag{1}$$



Por otra parte, conocemos la longitud del hilo entre M y Q :

$$\begin{aligned} a \operatorname{sh} \alpha_P - a \operatorname{sh} \alpha_M &= 200 - l_{QM} \\ &\Downarrow \\ \operatorname{sh} \alpha_P - \operatorname{sh} \alpha_M &= \frac{200}{a} - 2 . \end{aligned} \quad (2)$$

Las dos ecuaciones (1) y (2) permiten resolver el problema, ya que α_M es conocida. Podemos combinar ambas eliminando $40/a$ de (1), para obtener finalmente una ecuación en función de α_P :

$$f(\alpha_P) = \operatorname{sh} \alpha_P - 5 \operatorname{ch} \alpha_P + 5\alpha_P + \underbrace{\left[5\sqrt{2} - 1 - 5 \ln(1 + \sqrt{2}) + 2 \right]}_{=3,6642} = 0 . \quad (3)$$

2.— Para obtener la solución de (3) podemos proceder numéricamente, mediante iteraciones con el método de Newton. Para ello expresamos en primer lugar la derivada,

$$f'(\alpha_P) = \operatorname{ch} \alpha_P - 5 \operatorname{sh} \alpha_P + 5 , \quad (4)$$

mediante la cual las sucesivas aproximaciones a la solución se obtienen como

$$f'(\alpha_n) \Delta \alpha_n = -f(\alpha_n) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)} .$$

Debemos escoger un valor α_0 para comenzar las iteraciones. Para ello observamos que debe ser $\alpha_P > \alpha_M = 0,881$, por lo cual $\alpha_0 = 2$ puede ser un valor razonable. Realizando las operaciones,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2; & \Delta \alpha_0 &= -\frac{-1,5199}{-9,3721} = -0,16217; \\ \alpha_1 &= 1,8378; & \Delta \alpha_1 &= -\frac{-0,18988}{-7,0882} = -2,6789 \cdot 10^{-2}; \\ \alpha_2 &= 1,81104; & \Delta \alpha_2 &= -\frac{-0,0046416}{-6,74311} = -6,8835 \cdot 10^{-4}; \\ \alpha_3 &= 1,81035; & \Delta \alpha_3 &= -\frac{-3,01389 \cdot 10^{-6}}{-6,73436} = -4,4754 \cdot 10^{-7}; \end{aligned}$$

Vemos que a partir de la tercera iteración las cifras significativas no varían por lo que adoptamos este valor como solución, $\alpha_P = 1,81035$. Entrando con este valor en (2) se obtiene $a = 50,2936$ m, con lo cual queda resuelta la configuración del hilo.

3.— La tensión máxima se obtiene en el punto más alto (P):

$$T_P = qa \operatorname{ch} \alpha_P = 157,8256q .$$

Por último, la longitud apoyada es

$$l_{QM} = 2a = 100,5872 \text{ m} .$$