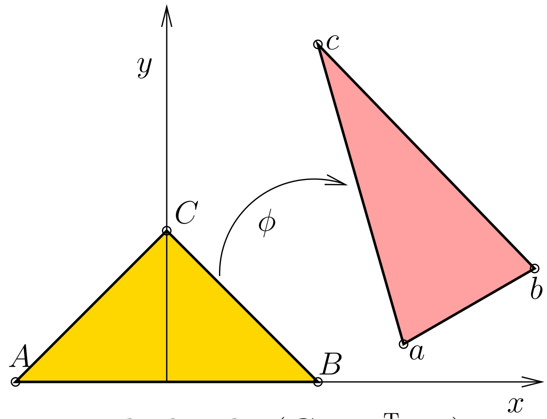
Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN PARCIAL (1 de febrero de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un sólido plano está sometido a una deformación homogénea $\phi : \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{x}$, de forma que el triángulo ABC de la figura se transforma de la siguiente forma:



$$\{\boldsymbol{X}_A\} = (-2,0)^{\mathrm{T}} \quad \{\boldsymbol{x}_A\} = (4-\sqrt{3}/2, 1/2)^{\mathrm{T}}$$
$$\{\boldsymbol{X}_B\} = (2,0)^{\mathrm{T}} \quad \{\boldsymbol{x}_B\} = (4+\sqrt{3}/2, 3/2)^{\mathrm{T}}$$
$$\{\boldsymbol{X}_C\} = (0,2)^{\mathrm{T}} \quad \{\boldsymbol{x}_C\} = (2, 1+2\sqrt{3})^{\mathrm{T}}$$

Se pide:

1. Obtener las componentes del tensor gradiente de la deformación ($\boldsymbol{F}$) y del tensor de Cauchy-Green por la derecha ($\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}$).

2. Calcular la relación de estiramiento $\lambda = \mathrm{d}l/\mathrm{d}l_0$ para las fibras con la dirección AC y AB.

3. Sea el tensor de Green-Lagrange, definido por $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \mathbf{1})$. Se considera una fibra elemental según una dirección genérica $\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}l_0\boldsymbol{u}_0 \mapsto \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}l\boldsymbol{u}$, definiéndose la deformación axial de dicha fibra como

$$E_u = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot (\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X})}{\mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}}.$$

   Interpretar el significado geométrico de este resultado, expresándolo (de forma genérica) en función de $\mathrm{d}l_0$ y $\mathrm{d}l$. Aplicarlo para calcular la deformación axial de Green Lagrange de las fibras según los lados AB y AC.

4. Calcular el tensor de estiramiento derecho $\boldsymbol{U}$ y el tensor de rotación $\boldsymbol{R}$ que verifican la descomposición polar $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}$. (Pista: $\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{C}$). Interpretar de forma geométrica la deformación a través de esta descomposición.

⋆

1.— Al tratarse de una deformación homogénea, la función $\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{X})$ debe ser lineal, por lo que sus componentes serán del tipo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1,0} + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \ ; \\ x_2 &= x_{2,0} + \alpha_3 X_1 + \alpha_4 X_2 \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Se precisa obtener los 6 coeficientes $(x_{1,0}, \alpha_1, \alpha_2, x_{2,0}, \alpha_3, \alpha_4)$ para lo cual basta con particularizar para los tres puntos A, B y C. Resolviendo resulta:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + \frac{\sqrt{3}}{4} X_1 - X_2 \ ; \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{4} X_1 + \sqrt{3} X_2 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que $F_{ij} = x_{i,j} = \partial x_i/\partial X_j$, resulta

$$[\boldsymbol{F}] = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & -1 & 0 \\ 1/4 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & -1 \\ 1/4 & \sqrt{3} \end{pmatrix} . \tag{3}$$

(Al ser la deformación plana basta con definir las sos primeras componentes de vectores y tensores.) El tensor de Cauchy-Green resulta

$$[\boldsymbol{C}] = [\boldsymbol{F}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{F}] = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

2.— Suponemos una fibra $\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}l_0\boldsymbol{u}_0 \mapsto \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}l\boldsymbol{u}$, con $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u})$ vectores unitarios. La forma cuadrática que define $\boldsymbol{C}$ tiene el significado siguiente

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}) &= (\mathrm{d}l_0\boldsymbol{u}_0)\cdot(\boldsymbol{C}\cdot(\mathrm{d}l_0\boldsymbol{u}_0)) = \mathrm{d}l_0^2\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{u}_0) \\ &= (\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}) = \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}l^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}l_0} = \sqrt{\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{u}_0)} .$$

Para las fibras pedidas:

$$\begin{aligned} AC: &\qquad \lambda_{AC} = \sqrt{(1/\sqrt{2},\, 1\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{Bmatrix}} = \frac{\sqrt{34}}{4} = 1{,}4577 ; \\ AB: &\qquad \lambda_{AB} = \sqrt{(1,\, 0)\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

3.— Numerador y denominador de la expresión citada se desarrollan como

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{1})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}] = \frac{1}{2}[\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}) - \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot(\boldsymbol{1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})] = \frac{1}{2}(\mathrm{d}l^2 - \mathrm{d}l_0^2) , \\ &\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}l_0^2 . \end{aligned}$$

Resulta entonces

$$E_u = \frac{\mathrm{d}l^2 - \mathrm{d}l_0^2}{2\mathrm{d}l_0^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) .$$

Por tanto, el significado geométrico es la razón entre la diferencia de los cuadrados de las distancias y el doble del cuadrado de la distancia inicial. Cuando el movimiento es rígido $\mathrm{d}l = \mathrm{d}l_0$ y será $E_u = 0$. Si $E_u > 0$ la fibra se estira, y si $E_u < 0$ se encoge.

Para las fibras citadas será

$$\begin{aligned} E_{AC} &= \frac{1}{2}(\lambda_{AC}^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{34}{16} - 1\right) = \frac{9}{16} ; \\ E_{AB} &= \frac{1}{2}(\lambda_{AB}^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{3}{8} . \end{aligned}$$

4.— Al ser $\boldsymbol{C}$ en las coordenadas dadas diagonal, su raíz cuadrada se obtiene trivialmente:

$$[\boldsymbol{U}]^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [\boldsymbol{U}] = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Por tanto,

$$[\boldsymbol{R}] = [\boldsymbol{F}][\boldsymbol{U}]^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} .$$

Mediante esta descomposición la deformación se puede interpretar como una distorsión o estiramiento $\boldsymbol{U}$ seguido de una rotación $\boldsymbol{R}$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} \mapsto (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}).$$

En nuestro caso particular, la distorsión $\boldsymbol{U}$ acorta a la mitad las fibras según la dirección X y alarga al doble las fibras según Y, siendo estas sus dos direcciones principales de alargamiento. Posteriormente, el triángulo sufre una rotación. El ángulo de rotación se obtiene fácilmente de considerar la matriz de rotación plana,

$$[R(\alpha)] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} ,$$

resultando un giro de $\alpha = 30°$. Por último, hay una traslación superpuesta $(4, 1)$, que no tiene contribución al gradiente de deformación $\boldsymbol{F}$.