Ingeniero Geólogo - Universidad Politécnica de Madrid

Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN PARCIAL (1 de febrero de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

En un medio continuo se conoce el tensor de tensiones en un punto, cuyas componentes cartesianas son

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{7}{8} & \frac{9\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{4} & 9\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Obtener las tensiones principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.
   (Pista: las direcciones principales respectivas son $\{\boldsymbol{n}_1\} = (1/2, \sqrt{3}/4, 3/4)^{\mathrm{T}}$, $\{\boldsymbol{n}_2\} = (-\sqrt{3}/2, 1/4, \sqrt{3}/4)^{\mathrm{T}}$, $\{\boldsymbol{n}_3\} = (0, -\sqrt{3}/2, 1/2)^{\mathrm{T}}$.)

2. Obtener los invariantes de tensiones $I_1(\boldsymbol{\sigma})$, $I_2(\boldsymbol{\sigma})$, $I_3(\boldsymbol{\sigma})$.
   (Pista: los invariantes son los coeficientes del polinomio característico, $\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{1}) = -\lambda^3 + I_1(\boldsymbol{\sigma})\lambda^2 - I_2(\boldsymbol{\sigma})\lambda + I_3(\boldsymbol{\sigma})$.)

3. Obtener la máxima tensión tangencial y el plano en el que actúa.

4. Sea un plano cuya normal es $\boldsymbol{n} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$. calcular la tensión normal y tangencial en dicho plano.

⋆

1.— Conocidas las direcciones principales $\{\boldsymbol{n}_i\}$, basta tener en cuenta que para cada una de ellas:

$$[\boldsymbol{\sigma}]\{\boldsymbol{n}_i\} = \lambda_i\{\boldsymbol{n}_i\} \quad (i \text{ no sumado}).$$

Así, evaluando el lado izquierdo de la ecuación anterior se obtiene trivialmente el factor de proporcionalidad (autovalor) $\lambda_i = \sigma_i$. El resultado es $\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 1,\ \sigma_3 = -2$.

2.— Desarrollando la ecuación característica, con el tensor expresado en el triedro de direcciones principales:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \lambda \end{vmatrix} = (\sigma_1 - \lambda)(\sigma_2 - \lambda)(\sigma_3 - \lambda)$$

$$= -\lambda^3 + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\lambda^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\lambda + \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Por tanto, las invariantes son

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2;$$
$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = -5;$$
$$I_3 = -6.$$

3.— La máxima tensión tangencial es

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{5}{2}.$$

La dirección del plano correspondiente es

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}_3 + \boldsymbol{n}_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{5\sqrt{2}}{8} \right) \ .$$

4.— El vector tensión en el plano dado es

$$\{\boldsymbol{t}\} = [\boldsymbol{\sigma}]\{\boldsymbol{n}\} = \left(\frac{9\sqrt{2}}{8}, \frac{11\sqrt{6}}{16}, \frac{17\sqrt{2}}{16} \right), \quad |\boldsymbol{t}| = \frac{\sqrt{122}}{4} = 2{,}761 \ .$$

La tensión normal es

$$\sigma_n = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{35}{16} = 2{,}1875 \ ,$$

y la tangencial se calcula mediante

$$\tau = \sqrt{|\boldsymbol{t}|^2 - \sigma_n^2} = \frac{\sqrt{727}}{16} = 1{,}685 \ .$$