Ingeniero Geólogo - Universidad Politécnica de Madrid

Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN PARCIAL (30 de enero de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un sólido se halla sometido a deformación plana, siendo las componentes del tensor de deformación lineal en un determinado punto

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \; .$$

El sólido es tiene un comportamiento elástico lineal isótropo, definido por módulos elásticos de Young $E = 10\,\text{MPa}$ y Poisson $\nu = 0{,}25$.

1. Obtener la deformación volumétrica y el tensor de deformación desviadora
2. Obtener las deformaciones principales y las direcciones en que se producen
3. Obtener las componentes del tensor de tensiones, incluyendo las tensiones en la dirección perpendicular (σ_{3i}).
4. Obtener las máximas y mínimas tensiones normales, así como las direcciones de los planos en los que se producen.
5. Se sabe que el material rompe cuando en algún plano se alcanza una tensión tangencial que supere 40 kPa. Verificar si se produce la rotura.

⋆

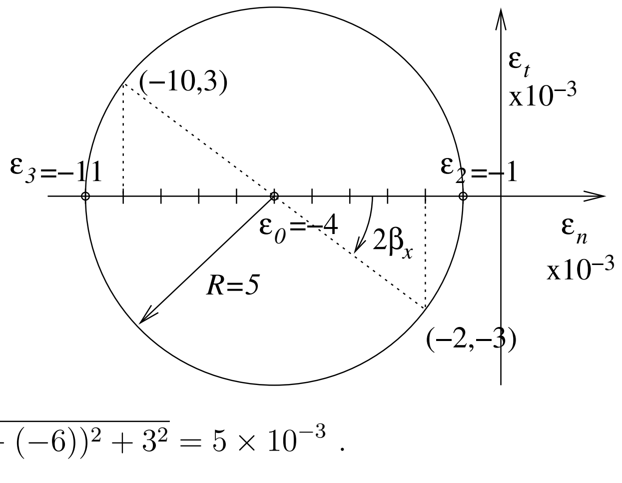
1.— La deformación volumétrica es $\varepsilon_v = \varepsilon_{pp} = -2 \cdot 10^{-3} - 10 \cdot 10^{-3} = -12 \cdot 10^{-3}$.

La deformación desviadora se define como $\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_v \mathbf{1}$, resultando sus componentes

$$[\boldsymbol{\varepsilon}'] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

2.— Lo primero que observamos es que la dirección 3 es principal con autovalor (deformación principal) nulo ($\varepsilon_1 = 0$), como es inmediato comprobar. La obtención de las otras dos deformaciones principales y sus direcciones puede hacerse mediante el círculo de Mohr o mediante procedimientos algebraicos.

En primer obtendremos los valores principales mediante el círculo de Mohr bidimensional, para los planos paralelos al eje 3. El punto correspondiente al eje x es $(-2, -3) \times 10^{-3}$ y para el eje y el $(-10, 3) \times 10^{-3}$. El centro y radio del círculo son por tanto



$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(-2 - 10) = -6 \times 10^{-3}; \quad R = \sqrt{(-2 - (-6))^2 + 3^2} = 5 \times 10^{-3} \; .$$

Las deformaciones principales son entonces

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + R = -1 \times 10^{-3}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_0 - R = -11 \times 10^{-3} \ .$$

El ángulo que forma el eje x con la dirección principal correspondiente a $\varepsilon_2 = -1$ es

$$\cos 2\beta_x = \frac{4}{5} \ \Rightarrow \ \cos^2 \beta_x = \frac{9}{10} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_x} \ \Rightarrow \ \operatorname{tg} \beta_x = \frac{1}{3} \ ,$$

lo que quiere decir que la otra dirección (ε_3) al ser ortogonal corresponde al ángulo $\operatorname{tg} \beta = -3$. En resumen, las deformaciones principales y sus direcciones son

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = 0; && \{\boldsymbol{n}\}_{(1)} = (0,0,1)^{\mathrm{T}};\\
&\varepsilon_2 = -1 \times 10^{-3}; && \{\boldsymbol{n}\}_{(2)} = (1,1/3,0)^{\mathrm{T}};\\
&\varepsilon_3 = -11 \times 10^{-3}; && \{\boldsymbol{n}\}_{(3)} = (1,-3,0)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

Otra forma de obtener los valores principales sería mediante la resolución algebraica del polinomio característico y posterior obtención de las direcciones. El polinomio característico es

$$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -10-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 12\lambda + 11) \ \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \varepsilon_1 = 0 \\ \lambda = \varepsilon_2 = -1 \times 10^{-3} \\ \lambda = \varepsilon_3 = -11 \times 10^{-3} \end{cases}$$

La dirección característica para $\varepsilon_1 = 0$ se obtiene trivialmente, $\{\boldsymbol{n}\}_{(1)} = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$. Las otras dos se obtienen de

$$\begin{pmatrix} -2-(-1) & 3 & 0 \\ 3 & -10-(-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(-1) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2-(-11) & 3 & 0 \\ 3 & -10-(-11) & 0 \\ 0 & 0 & -(-11) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.— Las componentes del tensor de tensiones se obtienen directamente al aplicar las ecuaciones de la elasticidad:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \lambda \varepsilon_v [\mathbf{1}] + 2\mu[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} -64 & 24 & 0 \\ 24 & -128 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{pmatrix} \mathrm{kPa} \ , \tag{1}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 4\,\mathrm{MPa}$, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 4\,\mathrm{MPa}$.

4.— Las direcciones principales de tensiones y deformaciones coinciden para un material elástico lineal isótropo. En efecto, sea $\boldsymbol{n}$ dirección principal de deformación, con autovalor α_ε, por lo que $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{n} = \alpha_\varepsilon \boldsymbol{n}$, aplicando las ecuaciones de Lamé

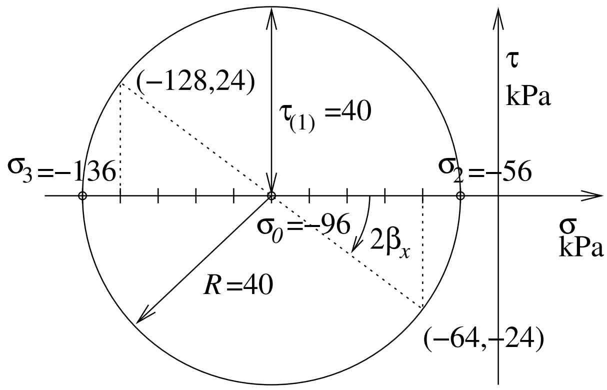
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \lambda \varepsilon \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{n} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{n} = (\lambda \varepsilon_v + 2\mu \alpha_\varepsilon)\boldsymbol{n} \ ,$$

es decir que la dirección principal es la misma, siendo el autovalor $\alpha_\sigma = \lambda \varepsilon_v + 2\mu \alpha_\varepsilon$.

Aplicando esto, las tensiones principales son

$$\sigma_1 = -48\,\mathrm{kPa} \ , \quad \sigma_2 = -56\,\mathrm{kPa} \ , \quad \sigma_3 = -136\,\mathrm{kPa} \ .$$

Aunque no resulta necesario, como comprobación podríamos emplear el círculo de Mohr de tensiones para comprobar que las tensiones y direcciones principales obtenidas corresponden efectivamente a las tensiones. El centro del círculo es $\sigma_0 = \frac{1}{2}(-64-128) = -96\,\mathrm{kPa}$, y el radio $R = \sqrt{(96-64)^2+24^2} = 40\,\mathrm{kPa}$. Comprobamos que las tensiones principales corresponden a $\sigma_2 = \sigma_0 + R$ y $\sigma_3 = \sigma - R$. Asimismo, los ángulos que forman las direcciones principales con las direcciones x e y son los mismos que los obtenidos anteriormente.



5.— Las tensiones tangenciales máximas se obtienen como:

$$\tau_{(1)} = \frac{1}{2}\|\sigma_2 - \sigma_3\| = 40\,\mathrm{kPa}\ ; \quad \tau_{(2)} = \frac{1}{2}\|\sigma_3 - \sigma_1\| = 44\,\mathrm{kPa}\ ; \quad \tau_{(3)} = \frac{1}{2}\|\sigma_1 - \sigma_2\| = 4\,\mathrm{kPa}\ .$$

La máxima absoluta es

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\|\sigma_3 - \sigma_1\| = 44\,\mathrm{kPa} > \tau_{\mathrm{rotura}} = 40\,\mathrm{kPa}\ .$$

Es decir, el material alcanza la rotura.