Ingeniero Geólogo - Universidad Politécnica de Madrid

Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN EXTRAORDINARIO (7 de diciembre de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*

Ejercicio 2.º (puntuación 10/45) Tiempo: 60 min.

Se considera un fluido con ley constitutiva $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$, siendo $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$ la presión.

i) Demostrar que la ecuación de equilibrio dinámico es, para este fluido,

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}} + \operatorname{grad} p = \rho\boldsymbol{b} \ , \tag{1}$$

donde ρ es la densidad y $\boldsymbol{b}$ las fuerzas volumétricas por unidad de masa.

ii) Si dicho fluido posee una ley constitutiva $p = -\kappa \operatorname{div} \boldsymbol{u}$, con κ una constante, y la densidad es constante demostrar que se puede eliminar la velocidad de la ecuación (1) para obtener la siguiente ecuación únicamente en función de la presión:

$$\ddot{p} - c^2 \triangle p = b \ . \tag{2}$$

La constante c está definida por $c^2 = \kappa/\rho$ y la función escalar b vale $b = \operatorname{div} \boldsymbol{b}/c^2$.

iii) Demostrar que la ecuación (2) admite soluciones que son ondas, indicando claramente cuál es la forma de las mismas.

iv) Se supone además ahora que el movimiento del fluido estudiado es estacionario y por lo tanto $p(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{p}(x_1, x_2, x_3)$. Más aún, el vector de fuerzas $\boldsymbol{b}$ es constante y de valor $\boldsymbol{b} = -g\boldsymbol{e}_3$, siendo g la aceleración de la gravedad. Demostar que si $\tilde{p}(x_1, x_2, 0) = 0$, entonces

$$\tilde{p}(x_1, x_2, x_3) = -\rho g x_3 \ .$$