Ingeniero Geólogo - Universidad Politécnica de Madrid

Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN FINAL (23 de junio de 2005)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*

Ejercicio 4.º (puntuación 10/45) Tiempo: 60 min.

Se considera un medio continuo fluido perfecto, es decir, con una ley constitutiva de la forma $\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1}$, siendo p la presión, un campo escalar. Además se sabe que este fluido es incompresible.

i. Demostrar que la aceleración espacial se puede escribir como

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\mathrm{grad}\,(|\boldsymbol{v}|^2) + 2\widehat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} \ ,$$

siendo $\widehat{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v} - \mathrm{grad}^T\boldsymbol{v})$ el tensor de spin.

ii. Se considera ahora únicamente el caso de un moviento estacionario, es decir, en el que se verifica $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0, \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ e irrotacional ($\widehat{\boldsymbol{w}} = 0$). Si las fuerzas volumétricas que actúan sobre este medio son de la forma $\rho\boldsymbol{b} = -\mathrm{grad}\,\beta$, siendo β un campo escalar, demostrar que la ley de balance de cantidad de movimiento se puede expresar como

$$\mathrm{grad}\,(p + \beta + \frac{\rho}{2}|\boldsymbol{v}|^2) = 0 \ ,$$

y que por lo tanto la cantidad $H = p + \beta + \frac{\rho}{2}|\boldsymbol{v}|^2$ es una cantidad constante (el teorema de Bernoulli).

iii. Recordar la expresión de la potencia tensional de un medio continuo

$$P_{ten} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d}\,\mathrm{d}v \ ,$$

siendo $\boldsymbol{d} = \mathrm{sim}[\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}]$ el tensor tasa de deformación. Demostrar que para un fluido como el descrito en los apartados anteriores la potencia tensional es siempre nula.