Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN FINAL (15 de septiembre de 2005)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*

Ejercicio 1.º (puntuación: 15/45) Tiempo: 90 min.

1.— Se considera un cuerpo de dominio Ω con contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$, siendo Γ_u y Γ_t disjuntos. Si el cuerpo es deformable pero sólo se consideran deformaciones infinitesimales, el equilibrio queda establecido mediante las ecuaciones:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} = \rho \boldsymbol{a} \qquad \text{en } \Omega \,,$$

Deducir, a partir de este sistema, el principio de los trabajos virtuales:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}) \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{w} \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \rho \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{w} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{w} \, \mathrm{d}\Gamma \ ,$$

siendo $\boldsymbol{w}$ un campo vectorial cualquiera que se anula en Γ_u.

Como la velocidad del cuerpo es un campo vectorial que se anula en Γ_u, deduce a partir del principio de los trabajos virtuales el teorema de las fuerzas vivas:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{d} \, \mathrm{d}\Omega + \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega \rho \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma \ ,$$

siendo $K = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho |\boldsymbol{v}|^2 \, \mathrm{d}\Omega$, la energía cinética del cuerpo y $\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla^T \boldsymbol{v})$.

2.— Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si la aceleración material de un cuerpo es cero, también lo será la aceleración espacial.

b) Un movimiento es rígido si y sólo si los alarmientos principales tienen valor 1.

c) Un movimiento con campo de velocidad espacial

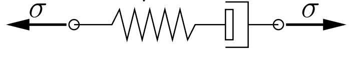
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{3x_2}{x_1^2 + x_2^2} \boldsymbol{e}_1 - \frac{3x_1}{x_1^2 + x_2^2} \boldsymbol{e}_2$$

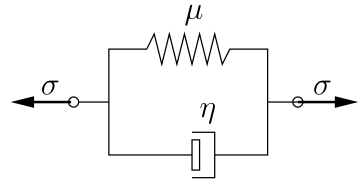
es incompresible.

d) El principio de invariancia establece que el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ ha de ser el mismo para cualquier observador que estudie un cuerpo.

e) El campo de desplazamientos $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) \ \phi(x_1 - x_3 + t)$, siendo ϕ una función escalar de variable escalar, corresponde a una onda elástica plana en un medio infinito.

3.— Para los modelos viscoelásticos elementales de Maxwell y kelvin de la figura adjunta, obtener las ecuaciones diferenciales que definen su comportamiento (en función de $(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})$). Explicar el concepto de funciones de fluencia y de relajación para un material viscoelástico.





⋆