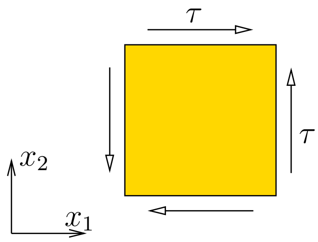
Ingeniería Geológica — Universidad Politécnica de Madrid

MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Problemas Adicionales Tema 1: Análisis de Tensiones — Curso 2005-06

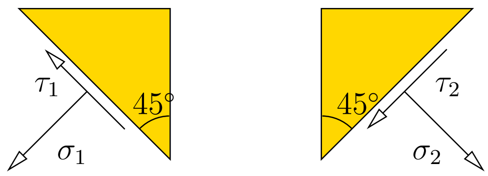
Problema 1.— Se considera el estado de tensión plana siguiente en un punto determinado de un medio continuo:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$



Se pide:

1. Obtener las tensiones normal y tangencial (σ, τ) sobre cada uno de los planos siguientes:



Para ello se emplearán cada uno de los procedimientos siguientes:

a) Equilibrio de las cuñas dibujadas en las figuras;

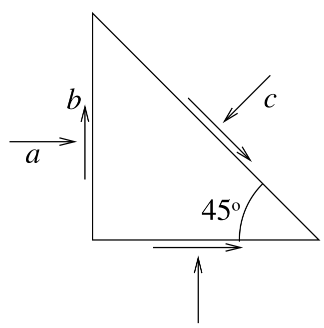
b) Fórmulas de tensión: $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$, $t_n = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$.

c) Cambio de coordenadas de los ejes (x_1, x_2) a los definidos por los planos pedidos.

d) Círculo de Mohr

2. Obtener las tensiones principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y sus direcciones respectivas $(\boldsymbol{n}^{(1)}, \boldsymbol{n}^{(2)}, \boldsymbol{n}^{(3)})$. Calcular a partir de éstas los máximos y mínimos de la tensión normal y tangencial.

Problema 2.— El estado de tensiones de un sólido elástico queda definido por las tensiones unitarias normales y tangenciales en las direcciones indicadas en la figura adjunta, conociéndose los valores $a = 15$ MPa, $b = 10$ MPa, $c = a\sqrt{2}$. Por otra parte se trata de un estado de deformación plana (deformación nula en dirección perpendicular al plano de la figura). Las constantes elásticas son $E = 30 \cdot 10^3$ Mpa y $\nu = 1/3$. Se pide:



1. Obtener todas las componentes del tensor de tensiones en coordenadas cartesianas.
2. Obtener las tensiones principales y la orientación de las mismas.

(Examen final 15/09/2004)

Resolver las cuestiones anteriores *a)* analíticamente aplicando las expresiones de la tensión; *b)* mediante el círculo de Mohr.

Nota: Para un estado de deformación plana, la tensión en la dirección perpendicular vale $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$.

Problema 3.— Dado el tensor de tensiones en un punto P mediante sus coordenadas en una base ortonormal dada,

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{pmatrix} \text{ [MPa]},$$

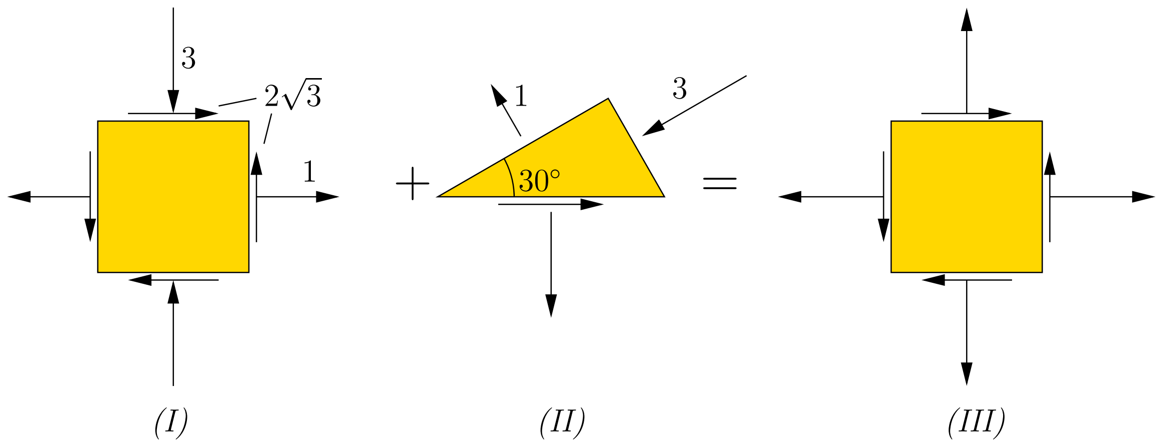
determinar:

1. El vector tensión en P sobre el plano con normal unitaria
$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{7}(2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3).$$

2. El vector tensión en P sobre el plano paralelo al que contiene los puntos $A \equiv (1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$, $B \equiv (0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ y $C \equiv (0,\ 0,\ 2)^{\mathrm{T}}$.

3. Descomponer el vector tensión obtenido en el apartado anterior en sus componentes normal y tangencial, determinando además sus módulos.

Problema 4.— Para el estado $III = I + II$ esquematizado en la figura, se pide:



1. Calcular las componentes del tensor de tensiones para el estado III:
   a) geométricamente a partir del círculo de Mohr.
   b) algebraicamente empleando el tensor de tensiones.
2. Determinar las tensiones principales y los invariantes.
3. Determinar las partes esférica y desviadora.

Problema 5.— Dado el campo de tensores de tensiones para una base ortonormal,

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} (1-x_1^2)x_2 + \frac{2}{3}x_2^3 & -(4-x_2^2)x_1 & 0 \\ -(4-x_2^2)x_1 & -\frac{1}{3}(x_2^3 - 12x_2) & 0 \\ 0 & 0 & (3-x_1^2)x_2 \end{pmatrix},$$

se pide:

1. Comprobar que se verifican las ecuaciones de equilibrio en todo punto para fuerzas másicas nulas.

2. Determinar el vector tensión en el punto $P \equiv (2, -1, 6)^{\mathrm{T}}$ sobre el plano $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$.

3. Obtener las componentes hidrostática y desviadora de la tensión en P. Calcular asimismo las tensiones principales, la lensión tangencial máxima y la tensión de corte octaédrica.

Problema 6.— En un medio continuo se conoce el tensor de tensiones en un punto, cuyas componentes cartesianas son

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{7}{8} & \frac{9\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{4} & 9\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Obtener las tensiones principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.
(Pista: los siguientes vectores son direcciones principales: $\{\boldsymbol{n}_1\} = (1/2, \sqrt{3}/4, 3/4)^{\mathrm{T}}$, $\{\boldsymbol{n}_2\} = (-\sqrt{3}/2, 1/4, \sqrt{3}/4)^{\mathrm{T}}$.

2. Obtener los invariantes de tensiones $I_1(\boldsymbol{\sigma})$, $I_2(\boldsymbol{\sigma})$, $I_3(\boldsymbol{\sigma})$.

3. Obtener la máxima tensión tangencial y el plano en el que actúa.

4. Sea un plano cuya normal es $\boldsymbol{n} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$. Calcular la tensión normal y tangencial en dicho plano.

(Examen final 01/02/2003)

Problema 7.— Un suelo está sometido al siguiente estado de tensión en un punto:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} -2a & a\sqrt{3} & 0 \\ a\sqrt{3} & -4a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}$$

1. Obtener las tensiones principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, la máxima tensión tangencial $\tau_{\max}$, y las direcciones de los planos respectivos.

(Examen final 24/06/2004)