Ejercicio 1.— Demostrar que para un cuerpo elástico sometido a tensión plana en las direcciones $\{1, 2\}$, la deformación en la dirección normal vale

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Ejercicio 2.— Comprobar que para un cuerpo sometido a deformación plana la matriz de módulos elásticos se puede expresar como

$$[\mathbb{C}] = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}\begin{pmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\bar{\nu}}{2} \end{pmatrix},$$

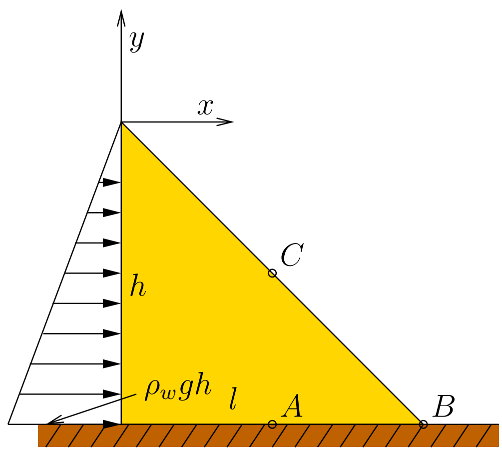
siendo $\bar{E} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{E}{1-\nu^2}$, $\bar{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\nu}{1-\nu}$.

Ejercicio 3.— Partiendo de la expresión conocida de $\boldsymbol{\nabla u}$ en cilíndricas, desarrollar la expresión de las componentes del tensor de deformaciones lineal, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla u}^{\mathrm{T}})$, comprobando que vale:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} u_{r,r} & \frac{1}{2}(\frac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r}u_\theta) & \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}) \\ \text{sim.} & \frac{1}{r}(u_{\theta,\theta} + u_r) & \frac{1}{2}(u_{\theta,z} + \frac{1}{r}u_{z,\theta}) \\ \text{sim.} & \text{sim.} & u_{z,z} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.— Se considera un tramo de una arteria coronaria que puede considerarse como un cilindro de rabio interior $a = 1$ mm, radio exterior $b = 2$ mm, sometido a presión interior $p = 14$ kPa (presión exterior nula). El tejido de la pared arterial puede considerarse elástico lineal e isótropo con módulos $E = 100$ kPa y $\nu = 1/3$. Se considerará un estado de deformación plana. Escribir la expresión analítica de u_r, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ y $\sigma_z z$ en función de la coordenada radial r. Dibujar la representación gráfica de dichas distribuciones.

Problema 2.— Se desea estudiar el estado de tensiones en una presa de gravedad de hormigón, que se puede considerar como un prisma triangular de gran longitud, altura h y base ℓ. Sobre el paramento vertical actúa la presión hidrostática del agua, que se supondrá llega hasta la misma coronación de la presa. El comportamiento de la presa se puede considerar como deformación plana y elástico, con módulos (E, ν).



El estado de tensiones puede caracterizarse mediante una función de tensiones $\phi(x, y)$ de la siguiente manera:

$$\phi(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3\,;$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + V\,, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + V\,, \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\,,$$

donde (a, b, c, d) son coeficientes a determinar y V es el potencial de las fuerzas másicas aplicadas (por unidad de volumen). Se pide:

1. Comprobar que las tensiones definidas a partir de la función ϕ dada cumplen efectivamente las ecuaciones de equilibrio en el medio continuo.
2. Determinar mediante las condiciones de contorno y las ecuaciones de equilibrio del conjunto los coeficientes (a, b, c, d), y la distribución de tensiones en la presa. Para ello se podrán emplear las siguientes condiciones:

   a) Equilibrio de fuerzas horizontales: la resultante de la acción sobre el paramento vertical debe ser equilibrada por la resultante del cortante en la base de la presa;

   b) Equilibrio de fuerzas verticales: el peso de la presa debe ser equilibrado por la resultante de la tensión vertical en la base;

   c) La componente de tensión σ_{xx} en el punto mmás bajo del paramento vertical debe igualar a la presión hidrostática aplicada;

   d) Condición de tensiones normales nulas en el punto medio del paramento inclinado, que está libre de acciones.

3. Obtener y dibujar las gráficas de tensiones en los paramentos vertical y horizontal (componentes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$).
4. Calcular las deformaciones en los puntos A, B y C de la figura. Tomar para ello los valores numéricos $E = 30\,\mathrm{GPa}, \nu = 0{,}25, \rho_h = 2500\,\mathrm{kg/m^3}, \rho_w = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, h = l = 50\,\mathrm{m}$.