Ejercicio 1.— Se considera un material elastoplástico con endurecimiento lineal, cuyo módulo elástico vale $E = 200$ GPa, módulo de endurecimiento plástico $H' = \mathrm{d}\sigma_f/\mathrm{d}\alpha = E/19$, tensión de fluencia inicial $\sigma_{f0} = 500$ MPa. Se ve sometido a carga uniaxial comenzando desde $\sigma = 0$ hasta $\sigma = 1{,}1\sigma_{f0}$ y a partir de aquí ciclos repetidos entre $+1{,}1\sigma_{f0}$ y $-1{,}1\sigma_{f0}$. Obtener las trayectorias tensión–deformación (σ–ϵ) y tensión–deformación plástica (σ–ϵ^p) calculando las coordenadas de todos los puntos de la trayectoria, así como el trabajo desarrollado en un ciclo, en los dos casos siguientes:

- endurecimiento isotrópico;
- endurecimiento cinemático.

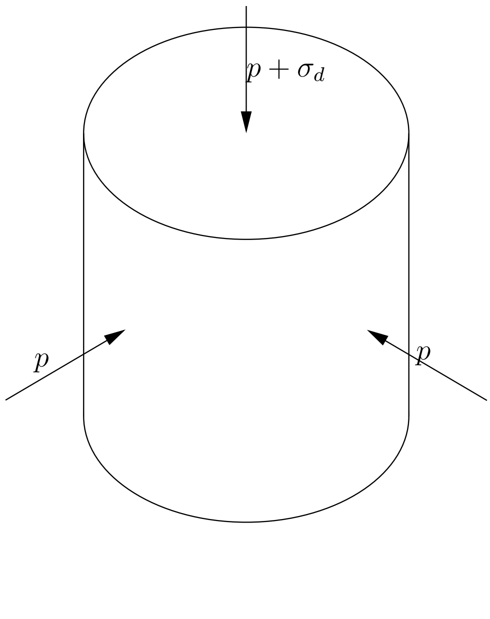
Ejercicio 2.— Obtener la expresión del tensor (de cuarto orden) de módulos elastoplástico tangente, a partir de las ecuaciones de la plasticidad tridimensional, comprobando que resulta:

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\boldsymbol{F}_\sigma \mathbf{:C:}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{F}_\sigma \mathbf{:C:}\boldsymbol{g} + H'}$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{ep}} = \mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C:}\boldsymbol{g}) \otimes (\boldsymbol{F}_\sigma \mathbf{:C})}{\boldsymbol{F}_\sigma \mathbf{:C:}\boldsymbol{g} + H'}$$

(En las expresiones anteriores $\boldsymbol{F}_\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{g}$ define la dirección del flujo plástico, $\mathbf{C}$ el el tensor de elasticidad (4.º orden) y H' el módulo de endurecimiento plástico.

Ejercicio 3.— Se desea interpretar un ensayo triaxial de una muestra de suelo, sobre una probeta cilíndrica, sobre la que actúa la presión hidrostática p de un fluido, además de una compresión adicional uniforme en dirección axial de valor σ_d (desviador de tensiones).



1. Expresar la matriz de componentes del tensor de tensiones así como las tensiones principales, ordenadas de la forma $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Calcular además la tensión de von Mises, $\sigma_{\mathrm{mis}} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{pq}\sigma'_{pq}}$, siendo σ'_{ij} las componentes de la tensión desviadora.

2. Admitiendo que el material sigue el criterio de fallo de Mohr-Coulomb, $F_0(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\operatorname{sen}\phi - 2c\cos\phi = 0$, obtener el valor del desviador σ_d que será necesario aplicar para el fallo plástico del material, expresándolo en función de la presión p y de los parámetros del material (c, ϕ). Particularizar para los valores $c = 20$ kPa, $\phi = 30°$, y $p = 2\sqrt{3}\,c$.

3. Obtener el valor de σ_d que se obtendría para el fallo si se cambiasen en cada caso los siguientes parámetros:

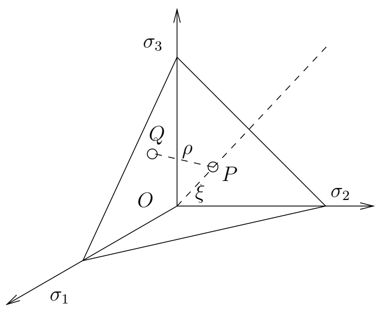
a) $c \;\to\; c/2 = 10$ kPa;

b) $\phi \;\to 45°$;

c) $p \;\to 0$.

Dibujar en cada caso el círculo de Mohr correspondiente al estado de tensiones y la línea de fallo de Mohr-Coulomb en el mismo diagrama. Discutir sobre la base de los anteriores resultados el efecto de la cohesión c, el ángulo de rozamiento ϕ y la presión p sobre la resistencia del material.

Ejercicio 4.— En el espacio de las tensiones principales para un material isótropo el punto representativo de la tensión es $Q \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, mientras que P es su proyección sobre el eje hidrostático, denominando $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \overline{OP}$ y $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \overline{PQ}$, demostrar que:



$$\xi = \sqrt{3}\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1$$

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{2J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\text{mis}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2}\end{aligned}$$

Ejercicio 5.— Para un material con el criterio de fallo de Mohr-Coulomb,

$$F_0(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\operatorname{sen}\phi - 2c\cos\phi = 0 \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)\,,$$

1. obtener la condición de fallo para las solicitaciones siguientes:
   - Tracción uniaxial $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$;
   - Compresión uniaxial $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_c$;
   - Tracción biaxial, $\sigma_1 = \sigma_{tb}$, $\sigma_2 = \sigma_{tb}$, $\sigma_3 = 0$;
   - Compresión biaxial, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -\sigma_{cb}$, $\sigma_3 = -\sigma_{cb}$;
2. Dibujar el corte de la superficie de fluencia en el espacio de las tensiones principales con el plano $\sigma_3 = 0$, demostrando que es un exágono irregular, cuyos vértices son los puntos de corte con los ejes (tensión uniaxial) y con sus bisectrices (tensión biaxial).
3. Demostrar que la expresión de la recta de fallo en el meridiano de tracción (ρ, ξ), en un estado dominado por la tracción $\sigma_t = \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ es

$$\rho_t = \frac{2\sqrt{6}c\cos\phi - 2\sqrt{2}\xi\operatorname{sen}\phi}{3 + \operatorname{sen}\phi}\,.$$

   Para ello se tendrá en cuenta la descomposición de las tensiones como suma de componentes esféricas y desviadoras,

$$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2s/3 & 0 & 0\\ 0 & -s/3 & 0\\ 0 & 0 & -s/3\end{pmatrix}\,,$$

   cumpliéndose que $\sigma_m = \xi/\sqrt{3}$ y $\rho = \sqrt{2/3}s$ (demostrar esta última expresión).

4. Demostrar que la expresión de la recta de fallo en el meridiano de compresión (ρ, ξ), en un estado dominado por la compresión $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 = -\sigma_c$ $(\sigma_c > 0)$ es

$$\rho_c = \frac{2\sqrt{6}c\cos\phi - 2\sqrt{2}\xi\,\mathrm{sen}\,\phi}{3 - \mathrm{sen}\,\phi} \ .$$

Para ello se tendrá en cuenta la descomposición de las tensiones como suma de componentes esféricas y desviadoras,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s/3 & 0 & 0 \\ 0 & s/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2s/3 \end{pmatrix} \ ,$$