INGENIERÍA GEOLÓGICA: MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

PROBLEMAS TEMA 0: ÁLGEBRA Y CÁLCULO TENSORIAL

Curso 2005/06

Problema 1

Sea una base ortonormal a derechas $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Se pide:

1) Demostrar que los vectores $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$ y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ son ortogonales.
2) Determinar una nueva base $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ de forma que $\boldsymbol{g}_1$ y $\boldsymbol{g}_2$ lleven las direcciones de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ respectivamente, y esta nueva base forme un triedro ortonormal a derechas.
3) Determinar la matriz de transformación que permite obtener la nueva base, mediante los coeficientes $\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{e}_p A_{pi}$.
4) Determinar la relación matricial de cambio de coordenadas, $\{\boldsymbol{v}\}_g = [\boldsymbol{A}]^T \{\boldsymbol{v}\}_e$.

Problema 2

Sean los vectores $\{\boldsymbol{u}\} = (1, 2, 0)^T$, $\{\boldsymbol{v}\} = (0, 1, 1)^T$, definidos mediante sus coordenadas en una base ortonormal a derechas. Se pide:

1) Obtener su producto escalar y vectorial.
2) Se realiza un cambio de base consistente en una rotación de $+45^o$ alrededor del eje $z(= x_3)$; obtener la matriz de cambio de coordenadas $[\boldsymbol{A}]^T$, así como las nuevas coordenadas de los vectores $\{\boldsymbol{u}'\}$ y $\{\boldsymbol{v}'\}$.
3) Comprobar que el producto escalar calculado con las nuevas componentes se conserva.
4) Comprobar que las las coordenadas del producto vectorial en la base nueva corresponden a las antiguas aplicando $[\boldsymbol{A}]^T$.

Problema 3

Demostrar las siguientes identidades empleando notación indicial:

1) $\nabla \wedge (\nabla \phi) = 0$, para toda función escalar ϕ.
2) $\nabla \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{a}) = 0$, para todo vector $\boldsymbol{a}$.
3) $(A_{ijk} + A_{jki} + A_{jik}) v_i v_j v_k = 3 A_{ijk} v_i v_j v_k$, para todo tensor de tercer orden $\boldsymbol{A}$ y todo vector $\boldsymbol{v}$.
4) $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, siendo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vectores.
5) $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a} : \widehat{\boldsymbol{a}} = 0$, para cualquier vector $\boldsymbol{a}$.
6) $\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} - \widehat{\boldsymbol{n}}\widehat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{1}$, siendo $\boldsymbol{n}$ un vector unitario.
7) Si $\boldsymbol{A}$ es un tensor simétrico de segundo orden y sus invariantes principales son I_1, I_2, I_3,

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{1} , \qquad \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{A}} = I_1 \boldsymbol{1} - \boldsymbol{A} , \qquad \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{A}} = \det(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{A}^{-1} .$$

Problema 4

Sea $\boldsymbol{S}$ un tensor de segundo orden simétrico con descomposición espectral

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_i \ .$$

1) Demostrar que $\boldsymbol{S}$ es definido positivo si y sólo si los tres autovalores λ_i son positivos.
2) Asumiendo que $\boldsymbol{S}$ sea definido positivo, definimos un nuevo tensor $\boldsymbol{P}$, denominado la raíz cuadrada de $\boldsymbol{S}$, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\lambda_i} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_i \ .$$

Demostrar que $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{S}$.

Problema 5

Consideramos ahora los tensores de orden dos *en dos dimensiones*, es decir, las aplicaciones lineales que transforman vectores de dimension 2 en otros vectores, también de dimensión dos.

1) Encontrar el polinomio característico de estos tensores. Describir los invariantes principales.
2) Demostrar que puede haber tensores de este tipo que, al contrario de lo que ocurre con los que están definidos en $\mathbb{R}^3$, no poseen ningún autovalor real. Dar un ejemplo.

Problema 6

Sea $\widehat{\boldsymbol{W}}$ un tensor hemisimétrico:

1) Demostrar que para todo vector $\boldsymbol{a}$,

$$\boldsymbol{a} \cdot \widehat{\boldsymbol{W}} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \ .$$

2) De la expresión anterior se deduce que el tensor $\widehat{\boldsymbol{W}}$ tiene al menos un autovalor nulo. Sea $\boldsymbol{u}$ su autovector asociado y $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ otros dos vectores que forman una base orthonormal a derechas $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ junto con el autovector. Demostrar que $\widehat{\boldsymbol{W}}$ ha de ser de la forma

$$\widehat{\boldsymbol{W}} = (\boldsymbol{w} \cdot \widehat{\boldsymbol{W}} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) \ .$$

3) Demostrar que el vector axial de $\widehat{\boldsymbol{W}}$ es precisamente

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{w} \cdot \widehat{\boldsymbol{W}} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} \ .$$