

INGENIERÍA GEOLÓGICA: MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

PROBLEMAS TEMA 0: ÁLGEBRA Y CÁLCULO TENSORIAL

Curso 2005/06

Problema 1

Encuentra, en los tres casos siguientes, el valor de la componente v_2 del vector $\mathbf{v}$:

$$v_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk} ,$$

$$v_i = c_{i,j} b_j - c_{j,i} b_j ,$$

$$v_i = B_{ji} a_j .$$

Problema 2

Sea Φ un campo escalar y $\mathbf{v}$ un campo vectorial. Demuestra las siguientes identidades empleando notación indicial e indica si el resultado es un escalar, un vector o un tensor.

- 1) $\nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}) = \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{v}.$
- 2) $\nabla(\Phi \mathbf{v}) = \mathbf{v} \otimes \nabla \Phi + \Phi \nabla \mathbf{v}.$
- 3) $\nabla \wedge (\Phi \mathbf{v}) = \nabla \Phi \wedge \mathbf{v} + \Phi \nabla \wedge \mathbf{v}.$

Problema 3

Expandir completamente las siguientes expresiones indiciales:

- 1) $T_{ij} v_j = w_i .$
- 2) $A_{ij} B_{jk} = \varepsilon_{ijk} v_j .$
- 3) $T_{ij} \phi_{,ij} .$
- 4) $A_{ij} \delta_{jk} .$
- 5) $a_i B_{jk} c_i .$

Problema 4

Se consideran los siguientes vectores en E^3 :

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 ,$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 ,$$

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{e}_3 .$$

y el tensor $\mathbf{T} = 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$.

Se pide:

- 1) Calcular el volumen del paralelepípedo delimitado por $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.
- 2) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman los vectores transformados $\{\mathbf{T}\mathbf{a}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{T}\mathbf{c}\}$.
- 3) Comprobar que el volumen del segundo paralelepípedo es igual al del primero multiplicado por el determinante de $\mathbf{T}$.
- 4) Obtener una base de vectores ortonormales a partir de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ mediante el método de Gram-Schmitz.

Problema 5

El tensor de segundo orden $\mathbf{A}$ tiene una matrix de componentes en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

El tensor $\mathbf{A}$, como todos los tensores, transforma vectores de $\mathbb{R}^3$ en vectores de $\mathbb{R}^3$. Calcular tres vectores de $\mathbb{R}^3$ que denominamos $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ los cuales, al ser transformados por $\mathbf{A}$, simplemente cambian de módulo pero no de dirección. Indicar cuánto se alarga o acorta cada uno de ellos.

Comprobar que cualquier vector que no sea paralelo ni a $\mathbf{a}_1$, ni a $\mathbf{a}_2$, ni a $\mathbf{a}_3$, al aplicarle $\mathbf{A}$, cambia de dirección.

Encontrar también un nuevo tensor $\mathbf{B}$ cuya acción sobre cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sea no sólo un escalado de su módulo sino un giro alrededor del eje definido por $\mathbf{a}_3$. Explicar cómo se halla dicho tensor.