INGENIERÍA GEOLÓGICA: MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

PROBLEMAS TEMA 2: CINEMÁTICA DE MEDIOS CONTINUOS
Curso 2005/06

Problema 1

Sea $\boldsymbol{T}$ un tensor de segundo orden y $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ dos vectores cualesquiera, demostrar la identidad:

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{a}) \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-T}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \ .$$

Problema 2

(examen extraordinario Diciembre 2004)

Sea $\boldsymbol{\varphi}$ una deformación rígida cualquiera.

1) Demostrar que el tensor de deformación de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$ asociado a $\boldsymbol{\varphi}$ se anula.
2) Encontrar una deformación rígida $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ tal que su tensor deformación infinitesimal asociado $\boldsymbol{\varepsilon}$ no se anule. Razonar cómo es posible esto.

Problema 3

La ecuación en notación indicial:

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} = \epsilon_{ik,jl} + \epsilon_{jk,ik} \ ,$$

expresa de forma compacta las seis condiciones de compatibilidad. Encontrar estas seis ecuaciones y expresarlas sin índices, desarrollando las componentes. Demostrar además que cuando la deformación es plana, de estas seis ecuaciones sólo una es independiente:

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = 2\epsilon_{12,12} \ .$$

Problema 4

(examen parcial febrero 2005)

Considerar la deformación:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = (\cos\theta\ X_1 - \operatorname{sen}\theta\ X_2)\boldsymbol{e}_1 + (\operatorname{sen}\theta\ X_1 + \cos\theta\ X_2)\boldsymbol{e}_2 + X_3\boldsymbol{e}_3\ ,$$

donde θ es una constante.

a) Demostrar que se trata de una deformación rígida (no necesariamente infinitesimal).

b) Calcular el correspondiente tensor de deformación infinitesimal.

c) Discutir por qué este tensor se debe o no se debe anular.

d) Explicar qué ocurre con este mismo tensor cuando $|\theta|$ es muy pequeño (pero no cero).

Problema 5

(examen parcial febrero 2005)

El campo de deformación de un medio continuo bidimensional es, en todo instante de tiempo,

$$\boldsymbol{\varphi}(X_1, X_2, t) = X_1 e^{tX_2}\boldsymbol{e}_1 + A(1+t)X_2\boldsymbol{e}_2\ ,$$

siendo A una constante.

i) Calcular el gradiente de deformación y el tensor de Cauchy-Green $\boldsymbol{C}$.

ii) Encontrar el valor de la constante A sabiendo que un diferencial de volumen situado en el punto $(X_1, X_2) = (1, 0)$ multiplica por 3 su tamaño en el instante $t = 2$.

iii) En este mismo punto e instante, calcular los invariantes principales de $\boldsymbol{C}$.

iv) También en el instante $t = 2$, ¿cuáles son los alargamientos máximo y mínimo que experimenta un vector diferencial situado en el punto $(X_1, X_2) = (1, 0)$?

v) Calcular la velocidad material y espacial en todo punto e instante.

vi) Calcular la aceleración material y espacial en todo punto e instante.

Problema 6

Una placa de longitud infinita tiene espesor h y anchura L, tal y como se observa en la figura 1. Dicha placa se deforma tomando una curvatura homogénea de valor R^{-1} sin que la superficie media de la placa se alargue, como también se indica en la figura. Deducir, a partir de los datos geométricos de la figura la expresión de la deformación $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(X_1, X_2, X_3)$ y del desplazamiento $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(X_1, X_2, X_3)$.

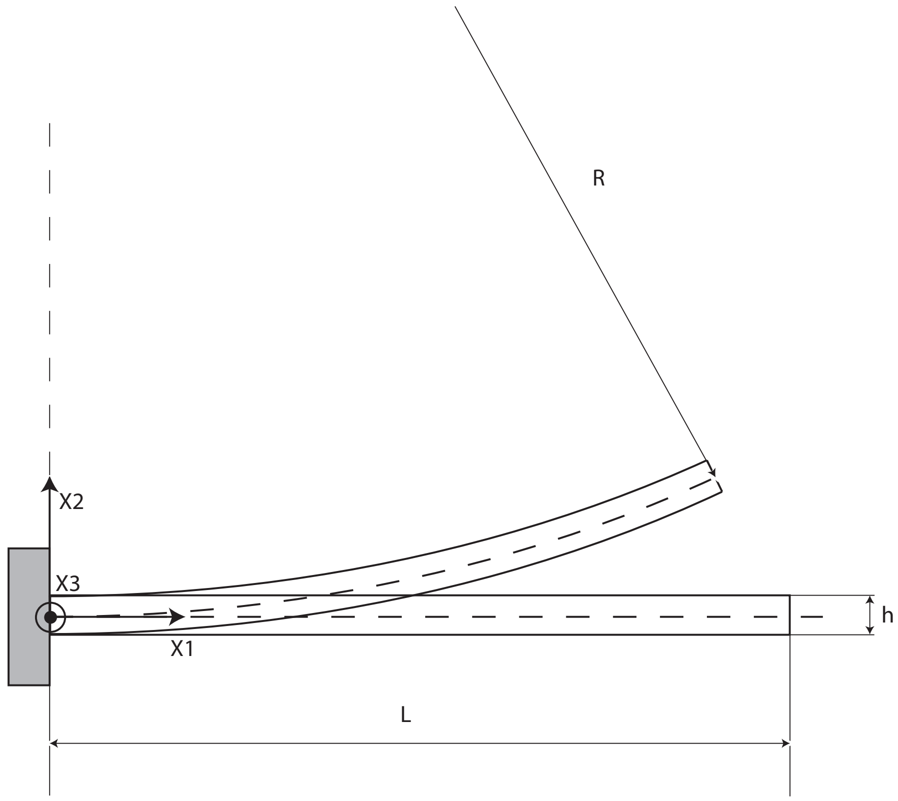

Figura 1: