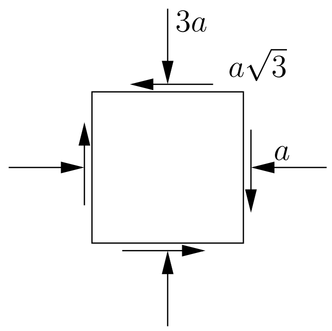
Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN FINAL (15 de septiembre de 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 3.º (puntuación: 20/45) Tiempo: 90 min.

Parte I (10 ptos.).— Se considera un material elástico lineal e isótropo sometido a deformación plana, con las tensiones esquematizadas en la figura adjunta. Las constantes elásticas son $E = 1000a$, $\nu = 1/4$. Se tomará el valor numérico $a = 100$ kPa. Se pide:



1. Expresar las componentes del tensor de tensiones. Obtener la tensión hidrostática y las componentes de la tensión desviadora.
2. Calcular las tensiones principales y sus direcciones. Para estas direcciones calcular de nuevo la tensión hidrostática y desviadora.
3. Calcular las deformaciones principales y sus direcciones.

Parte II (10 ptos.).—

1. Suponiendo que el material obedece un criterio de plasticidad de Mohr-Coulomb, definido por una cohesión $c = 40$ kPa y ángulo de rozamiento $\phi = 45°$, calcular el valor de a para el que se alcanzará la condición plástica.
2. Suponiendo que el material se ve sometido a un estado de compresión biaxial a_1 (en deformación plana), obtener este valor para que se alcance la plasticidad.
3. Misma cuestión si el material se ve sometido a un estado de corte puro, de valor a_2 e igualmente en deformación plana.

Nota: Criterio de Mohr-Coulomb: $F_0(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\operatorname{sen}\phi - 2c\cos\phi = 0$.

⋆

Parte I

I.1.— Las componentes de tensiones definidas en la figura son $\sigma_{11} = -a$, $\sigma_{22} = -3a$, $\sigma_{12} = -a\sqrt{3}$. Conocemos todas las componentes salvo la tensión perpendicular al plano de la figura. Esta se calcula mediante las ecuaciones de la elasticidad y la condición de deformación plana:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}); \qquad \varepsilon_{33} = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\,. \tag{1}$$

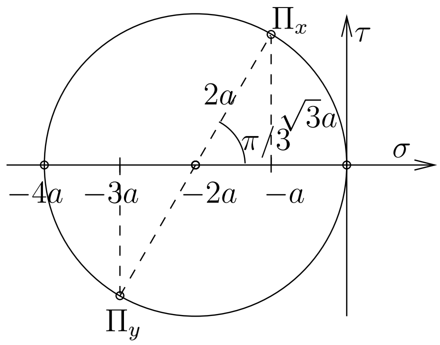
Por tanto con los datos del problema resulta $\sigma_{33} = -a$ y

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} -a & -a\sqrt{3} & 0 \\ -a\sqrt{3} & -3a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}\,. \tag{2}$$

La tensión hidrostática es $\sigma_m = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -(5/3)a$. La tensión desviadora es

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = [\boldsymbol{\sigma}] - \sigma_m[\mathbf{1}] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a & -a\sqrt{3} & 0 \\ -a\sqrt{3} & -\frac{4}{3}a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}a \end{pmatrix}. \tag{3}$$

I.2.— La forma más sencilla de calcular las tensiones principales es a través del círculo de Mohr. Las componentes de Mohr para el plano Π_x (normal al eje x) son $(\sigma,\tau) = (-a, \sqrt{3}a)$, y las de Π_y son $(-3a, -\sqrt{3}a)$. Por tanto se deduce inmediatamente que el centro se halla en $\sigma_0 = -2a$, el radio es $R = 2a$, y las tensiones principales dentro del plano son $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_3 = -4a$. La tensión perpendicular al plano es principal y de valor intermedio entre las dos anteriores $\sigma_2 = -a$. El ángulo que hay que girar los planos coordenados para obtener las direcciones principales es la mitad del indicado en el círculo de Mohr, es decir $\pi/6$ en sentido horario.



Alternativamente podríamos haber calculado las tensiones principales a través del polinomio característico del problema de autovalores:

$$0 = \det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -a-\lambda & -a\sqrt{3} & 0 \\ -a\sqrt{3} & -3a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -a-\lambda \end{vmatrix} = -(a+\lambda)\left[(a+\lambda)(3a+\lambda) - 3a^2\right], \tag{4}$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = -a; \quad \lambda^2 + 4a\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda = 0\,; \\ \lambda = -4a\,. \end{cases} \tag{5}$$

Estos valores coinciden con los obtenidos antes. Para obtener las direcciones se calcularían los vectores propios asociados a cada autovalor.

La tensión hidrostática en las direcciones principalessigue valiendo $-(5/3)a$ (es un invariante), mientras que la desviadora en estos ejes vale

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = [\boldsymbol{\sigma}] - \sigma_m[\mathbf{1}] = \begin{pmatrix} \sigma_1' & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3' & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3}a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}a \end{pmatrix}. \tag{6}$$

(Téngase en cuenta que se ha mantenido la componente fuera del plano en el tercer índice de la matriz a pesar de que la llamáramos σ_2.)

I.3.— Emplearemos el resultado conocido de que las direcciones de las deformaciones principales coinciden con las de tensiones principales en la elasticidad isótropa. Por tanto la forma más fácil de obtenerlas es emplear las ecuaciones de la elasticidad en estas componentes principales:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_2+\sigma_3) = \frac{1}{E}5a\nu = 1{,}25\cdot 10^{-3}\,, \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_3+\sigma_1) = 0\,, \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2) = \frac{1}{E}(-4a+\nu a) = -4{,}25\cdot 10^{-3}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Parte II

II.1.— Basta sustituir en la expresión del criterio de Mohr Coulomb los valores calculados antes de tensiones principales ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -a, \sigma_3 = -4a$), resultando:

$$a = \frac{c}{2}\frac{\cos\phi}{1-\operatorname{sen}\phi} = 48{,}28\,\mathrm{kPa}\,. \tag{8}$$

(Es decir, el valor $a = 100$ kPa definido en el ejercicio anterior supondría la plastificación del material.)

II.2.— En este caso las tensiones principales dentro del plano son $\sigma_2 = \sigma_3 = -a_1$ y tensión normal al plano es $\sigma_1 = \nu(-2a_1) = -a_1/2$. De la expresión del criterio de plasticidad resulta:

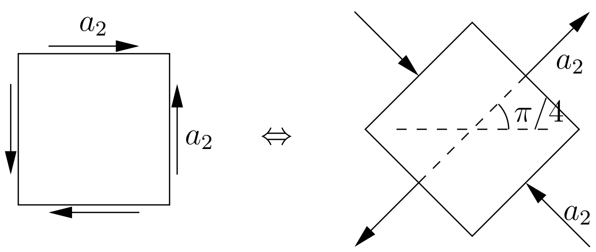
$$a_1 = 4c\frac{\cos\phi}{1-3\operatorname{sen}\phi} = -50{,}45\,\mathrm{kPa}\,. \tag{9}$$

El signo negativo obtenido para a_1 contradice la hipótesis realizada a priori de que el estado biaxial era de compresión. Esto indica que con el ángulo de rozamiento dado el material *nunca* alcanzará el límite plástico bajo compresión biaxial.

Si el estado fuera de tracción biaxial, las tensiones principales serían ($\sigma_1 = \sigma_2 = a_1, \sigma_3 = a_1/2$). Aplicando en este caso la expresión del criterio de fluencia resultaría

$$a_1 = 4c\frac{\cos\phi}{1+3\operatorname{sen}\phi} = 36{,}25\,\mathrm{kPa}\,. \tag{10}$$

II.3.— El estado de corte puro a_2 en el plano es equivalente a unas tensiones principales $\pm a_2$ giradas $\pi/4$:



La tensión normal al plano es nula:

$$\sigma_3 = \nu(a_2 - a_2) = 0\,,$$

por lo que las tensiones principales valen ($\sigma_1 = a_2, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -a_2$). Aplicando la expresión del criterio de fluencia resulta

$$a_2 = c\cos\phi = 28{,}28\,\mathrm{kPa}\,.$$