INGENIERÍA GEOLÓGICA: MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

PROBLEMAS VOLUNTARIOS TEMA 0: ÁLGEBRA Y CÁLCULO TENSORIAL

Curso 2005/06

Problema 1

Se define un cambio de coordenadas mediante una rotación de ángulo θ alrededor del eje x. Se pide:

1) Obtener la matriz de cambio de coordenadas $[\boldsymbol{A}] = [A_{ij}]$ mediante la aplicación de la fórmula $A_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_j$.
2) Comprobar que la matriz así obtenida es ortogonal.
3) Demostrar que $[\boldsymbol{A}]^n$ corresponde a una rotación de ángulo $n\theta$.

Problema 2

1) Demostrar que todo tensor de orden dos en $\mathbb{R}^3$ tiene al menos un autovalor real.
2) Demostrar que todo autovalor real de un tensor hemisimétrico ha de valer 0.
3) Sea $\boldsymbol{W}$ un tensor hemisimétrico no nulo. Demostrar que su vector axial $\boldsymbol{w}$ es paralelo al autovector asociado al autovalor 0.

Problema 3

Sean $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{T}$ dos tensores cualesquiera, $\boldsymbol{S}$ un tensor simétrico y $\boldsymbol{H}$ un tensor hemisimétrico, demostrar:

1) $\boldsymbol{S} : \boldsymbol{H} = 0$.
2) $\boldsymbol{S} : \boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} : \mathrm{sim}[\boldsymbol{T}]$.
3) $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{T} = \boldsymbol{H} : \mathrm{hem}[\boldsymbol{T}]$.
4) $\boldsymbol{U} : \boldsymbol{T} = \mathrm{sim}[\boldsymbol{U}] : \mathrm{sim}[T] + \mathrm{hem}[\boldsymbol{U}] : \mathrm{hem}[T]$.

Problema 4

(para este problema se puede buscar ayuda en libros de álgebra)

Demostrar que todo tensor de segundo orden simétrico posee tres autovalores reales (iguales o distintos) y tres autovectores ortogonales.

Problema 5

Sea una base ortonormal a derechas $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Se pide:

1) Sea $\boldsymbol{S}$ un tensor simétrico con descomposición espectral:

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i \ .$$

Comprobar que el tensor

$$\sqrt{\boldsymbol{S}} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\lambda_i} \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i$$

es realmente la raíz cuadrada de $\boldsymbol{S}$, es decir, que $\sqrt{\boldsymbol{S}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}$.

2) Sea $\boldsymbol{S}$ un tensor simétrico y $\boldsymbol{T}$ un tensor cualquiera. Demostrar que:

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} : \mathrm{sim}(\boldsymbol{T}) \ .$$

3) Sean $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{T}$ dos tensores cualesquiera. Demostrar que:

$$\boldsymbol{U} : \boldsymbol{T} = \mathrm{sim}(\boldsymbol{U}) : \mathrm{sim}(\boldsymbol{T}) + \mathrm{hem}(\boldsymbol{U}) : \mathrm{hem}(\boldsymbol{T}) \ .$$

4) Sea $\boldsymbol{F}$ un tensor con $\det \boldsymbol{F} > 0$. Demostrar que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F}$ es simétrico, definido positivo.

Problema 6

(Difícil) Demostrar la siguiente identidad relacionada con el tensor de permutación:

$$\epsilon_{pij}\epsilon_{pkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \ .$$

(Pista: usar la propiedad $\epsilon_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k = \det([\boldsymbol{e}_i \ \boldsymbol{e}_j \ \boldsymbol{e}_k])$. En palabras, ϵ_{ijk} es igual al determinante de una matriz cuyas columnas son los tres vectores $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k$.)

Problema 7

Encuentra, en los tres casos siguientes, el valor de la componente v_2 del vector $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned} v_i &= \varepsilon_{ijk} T_{jk} \ , \\ v_i &= c_{i,j} b_j - c_{j,i} b_j \ , \\ v_i &= B_{ji} a_j \ . \end{aligned}$$

Problema 8

Sea Φ un campo escalar y $\boldsymbol{v}$ un campo vectorial. Demuestra las siguientes identidades empleando notación indicial e indica si el resultado es un escalar, un vector o un tensor.

1) $\nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{v}) = \nabla \Phi \cdot \boldsymbol{v} + \Phi \nabla \cdot \boldsymbol{v}$.
2) $\nabla (\Phi \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \otimes \nabla \Phi + \Phi \nabla \boldsymbol{v}$.
3) $\nabla \wedge (\Phi \boldsymbol{v}) = \nabla \Phi \wedge \boldsymbol{v} + \Phi \nabla \wedge \boldsymbol{v}$.