MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

PROBLEMAS TEMA 0: ALGEBRA Y CÁLCULO TENSORIAL

Curso 2006-07

Problema 1.— Calcular las matrices de componentes de los siguientes tensores, definidos como aplicaciones lineales:

1. La proyección de los vectores en dos dimensiones ($\mathcal{V}^2$) sobre un eje que forme 30° con la dirección x_1.

2. La rotación de los vectores en tres dimensiones ($\mathcal{V}^3$) alrededor de un eje que forme 60° tanto con la dirección x_1 como con la x_2. (Como es lógico, se deberá calcular primero el ángulo que forma este eje con x_3.)

Problema 2.— Calcular los valores y vectores propios de

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Comprobar que los vectores propios son ortogonales.

2. Expresar por medio del producto tensorial el tensor que tansforma los vectores de la base original en los vectores del sistema de coordenadas principal.

Problema 3.— Dado el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, x_3\}$, al que se asocia la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, y el vector en dicho sistema de coordenadas que tiene la forma $\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$

Se pide calcular:

1. $\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{r}$

2. $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{r}$

Problema 4.— Dados los tensores de orden 1 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ y el tensor de orden 2 $\boldsymbol{T}$ escriba en notación indicial las siguientes expresiones:

1. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c})$

2. $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}$

3. $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$

4. $\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$

5. $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{T}$

6. $\boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{a}$

7. $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{T}$

8. $\boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{a}$

Calcule dichas expresiones para $\boldsymbol{a} = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-1, -1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (1, 2, -1)$ y

$$[\boldsymbol{T}] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 5.— Sea un campo escalar ϕ y un campo vectorial $\boldsymbol{v}$. Demuestre las siguientes identidades empleando la notación indicial:

1. $\boldsymbol{\nabla} \bullet (\phi \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}\phi \bullet \boldsymbol{v} + \phi \boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{v}$
2. $\boldsymbol{\nabla}(\phi \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\nabla}\phi + \phi \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}$
3. $\boldsymbol{\nabla} \wedge (\phi \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}\phi \wedge \boldsymbol{v} + \phi \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v}$