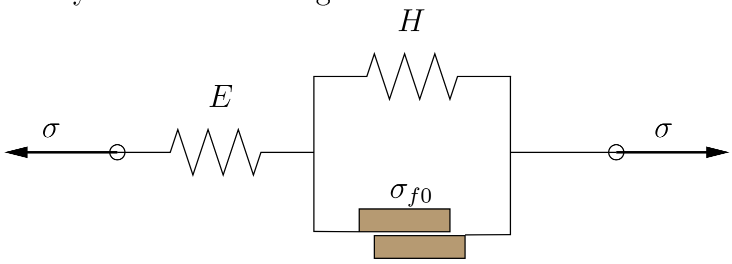
# MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

## Problemas Tema 7: Plasticidad

Curso 2006-07

**Problema 1.**— Desarrollar las ecuaciones que expresan la ley tensión–deformación unidimensional de un modelo elastoplástico con endurecimiento lineal a partir de la representación esquemática con resortes y rozantes de la figura.




**Problema 2.**— Se considera un material elastoplástico sometido a carga uniaxial. Las propiedades del material son módulo elástico $E = 1$ GPa, límite elástico inicial $\sigma_{f0} = 0{,}01E$, y endurecimiento lineal con módulo $H = E/9$. Se considera la historia de cargas definida por 1) carga desde $\sigma = 0$ hasta $\sigma = 1{,}2\sigma_{f0}$; 2) descarga y subsiguiente carga en compresión hasta $\sigma = -1{,}2\sigma_{f0}$; 3) ciclos de carga repetidos entre $\pm 1{,}2\sigma_{f0}$. Considerando endurecimiento lineal isótropo y cinemático, obtener en cada uno de los casos:

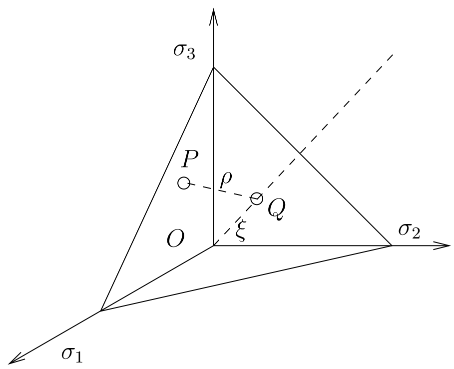
1. los diagramas tensión–deformación expresando en cada punto las deformaciones plásticas;
2. trabajo desarrollado por histéresis en cada ciclo de carga.

**Problema 3.**— Suponiendo un modelo de plasticidad de Von Mises, obtener la condición de plasticidad para los siguientes estados de carga:

1. tensión uniaxial de tracción y de compresión $\sigma$;
2. corte puro $\tau$;
3. tensión uniaxial $\sigma$ más corte puro $\tau$.

**Problema 4.**— Para el criterio de Mohr–Coulomb, obtener el corte de la superficie de fluencia con el plano de tensión biaxial (plano $\sigma_1 - \sigma_2$, considerando $\sigma_3 = 0$), enfunción de los parámetros del material $(c, \phi)$. Se tendrá en cuenta que los vértices de este exágono son los 2 puntos de tracción uniaxial, los 2 de compresión uniaxial y los de tracción y compresión biaxial.

**Problema 5.**— Se desea emplear las magnitudes $(\rho, \xi)$ para caracterizar las superficies de plasticidad. La definición geométrica de estas magnitudes para un punto de tensión $P \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ se expresa en la figura y las relaciones en función de las tensiones se estudiaron en el problema 3 del tema 2. Se define el plano meridiano como aquel que contiene al eje hidrostático. El meridiano de tracción es la intersección de un plano meridiano que contenga además a uno de los ejes de tensión principal con la superficie de fluencia por el lado de tracción del eje. El meridiano de compresión es la intersección por el lado de compresión del eje.



Se pide demostrar que las expresiones $\rho(\xi)$ para los meridianos de tracción y compresión de las supercicies de plasticidad de de Mohr–Coulomb y Rankine respectivamente son las siguientes:

- *Modelo de Mohr Coulomb:*

$$\begin{aligned} &\text{Meridiano de tracción:} && \rho = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{2c\cos\phi - (2/\sqrt{3})\xi\operatorname{sen}\phi}{1+(1/3)\operatorname{sen}\phi} \\ &\text{Meridiano de compresión:} && \rho = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{2c\cos\phi - (2/\sqrt{3})\xi\operatorname{sen}\phi}{1-(1/3)\operatorname{sen}\phi} \end{aligned}$$

- *Modelo de Rankine:*

$$\begin{aligned} &\text{Meridiano de tracción:} && \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}\,\sigma_{f0} - \xi) \\ &\text{Meridiano de compresión:} && \rho = \sqrt{2}(\sqrt{3}\,\sigma_{f0} - \xi) \end{aligned}$$

Dibujar en una gráfica las expresiones anteriores, junto con las rectas que representan la tracción uniaxial y la compresión uniaxial, y comprobar las condiciones de fallo para dichos estados de tensión como intersección de dichas rectas con los meridianos calculados.

Para obtener estas expresiones se caracterizará el estado de tensión mediante una descomposición volumétrica–desviadora, teniendo en cuenta que las otras dos tensiones principales distintas del eje contenido en el plano meridiano en cada caso son iguales, de la manera siguiente.

- *Meridiano de tracción:* estado biaxial dominado por la tracción, $\sigma_t = \sigma_1$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s/3 & 0 & 0 \\ 0 & -s/3 & 0 \\ 0 & 0 & -s/3 \end{pmatrix}$$

- *Meridiano de compresión:* estado biaxial dominado por la compresión, $\sigma_c = -\sigma_3$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s/3 & 0 & 0 \\ 0 & s/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2s/3 \end{pmatrix}$$

En ambas descomposiciones se cumple $\xi = \sqrt{3}\,\sigma_m$ y $\rho = \sqrt{2/3}\,s$ (demostrar esta ultima expresión).