Modelos constitutivos

Abril 11, 2005

Ignacio Romero. `iromero@mecanica.upm.es`

Índice

1. Introducción

La descripción cinemática de los medios continuos, explicada en el capítulo 3, y sus leyes de balance, descritas en el capítulo anterior, son válidas para todo cuerpo continuo. Más aún, las ecuaciones matemáticas correspondientes son idénticas en todos los casos: la ecuación de balance de cantidad de movimiento siempre es la misma, la definición del tensor de deformación de Green-Lagrange es común para todos los cuerpos, etc.

Sin embargo, la experiencia nos indica que los cuerpos responden de manera muy distinta ante los mismos estímulos. Por ejemplo, ante una fuerza puntual un bloque de acero y otro de madera se comportan de manera distinta, y distinta a su vez de un volumen idéntico de agua. Puesto que estas diferencias no aparecen ni en la descripción cinemática ni en las ecuaciones de balance deben de aparecer en algún otro lado. Este lugar son las llamadas "ecuaciones constitutivas", que establecen una relación funcional entre la tensión aplicada y la deformación resultante, y que son el objeto del presente capítulo.

Si consideramos por un momento una deformación cualquiera de un sólido tridimensional el número de funciones que aparecen para la descripción de su cinemática y su comportamiento mecánico (ignoramos efectos térmicos) son quince. Tres son las componentes de la deformación, seis del tensor de deformaciones y seis del tensor de tensiones de Cauchy. La definición del tensor de deformación proporciona seis ecuaciones y la ley del balance de la cantidad de movimiento otras tres. En total tenemos quince funciones incógnita y nueve ecuaciones que éstas deben de cumplir. Para que el sistema tenga solución hacen falta seis ecuaciones más, que son las que proporciona el modelo constitutivo. Con él, el número de incógnitas y el de ecuaciones es el mismo y así cabe la esperanza de que el problema mecánico tenga solución y de que la podamos encontrar.

El objetivo de este capítulo es describir, de forma general, las relaciones constitutivas de sólidos y fluidos. Como veremos más adelante, no todas las ecuaciones que relacionan deformación con tensión pueden ser una relación constitutiva, pues estas han de ser "razonables". Qué se entiendo por una relación "razonable" es un problema que aún no se ha resuelto completamente, sin embargo sí que se conoce alguna propiedad que debe de cumplirse y que explicaremos. De entre ellas la más importante es la objetividad material o principio de invariancia respecto a cambios de observador.

Hay que resaltar, por último, que los modelos constitutivos que presentamos en este capítulo, y más aún todos los que se emplean en este curso, son modelos de materiales idealizados. No existe ningún material perfectamente elástico o plástico. La validez de estos modelos es mayor tanto en cuanto los resultados que de ellos se deriven se ajusten al comportamiento real de los cuerpos que representan.

2. Principios generales de los modelos constitutivos

Como se indicaba en la introducción, no se puede definir cualquier relación funcional entre la tensión y la deformación y esperar que ésta represente una relación constitutiva válida. La determinación de las restricciones que debe de satisfacer una relación constitutiva es el mayor problema (no resuelto) de la mecánica de materiales (véase [`Truesdell-Noll`]).

Aunque el problema no esté resuelto completamente se conocen algunos principios muy elementales que debe de satisfacer cualquier relación constitutiva. Estos son:

- El principio de determinismo.
- El principio de acción local.
- El principio de la memoria limitada.
- El principio de invariancia.

A continuación se explican los tres primeros y el último, por su importancia, se tratará en la sección siguiente.

El principio de determinismo

Este principio establece que el estado de tensiones en un punto del cuerpo puede depender de la deformación actual y de las deformaciones pasadas, pero nunca de las deformaciones futuras.

El principio de acción local

Este segundo principio postula que el estado de tensión en un punto de un medio continuo depende de la deformación en un entorno, tan pequeño como se quiera, de dicho punto. Es decir, que la historia de deformación en un puntos alejados no influye en el valor de la tensión.

Matemáticamente, este principio establece que la tensión en un punto del cuerpo sólo puede depender de (la historia) de la deformación y sus derivadas en ese mismo punto. En el caso particular en el que la tensión es únicamente función de la primera derivada, es decir, del gradiente de deformación $\boldsymbol{F}$, se dice que el material es "simple". Si depende, en general, de las n primeras derivadas de la deformación se dice que es un material "de grado n".

El principio de la memoria limitada

El siguiente principio refleja la experiencia cotidiana que nos indica que, aunque en teoría la tensión en un punto depende de toda la historia pasada de deformación, únicamente hace falta tener en cuenta la historia reciente. Más concretamente, este principio establece que el valor de la deformación en instantes muy remotos ha de tener menos influencia en la tensión actual que aquellos valores próximos en el tiempo.

3. El principio de invariancia

El principio de objetividad o de invariancia respecto a cambios de observador es uno de los principios más importantes de la Mecánica de Medios Continuos. Aunque a simple vista pueda parecer elemental no es así, y nos remitimos a [`Truesdell-Noll`] para una descripción completa de su historia y de su contenido.

El principio en cuestión establece que las relaciones constitutivas deben de ser válidas para cualquier observador.

Consideremos un observador que estudia el movimiento y deformación de un cuerpo. Para este observador la deformación del cuerpo se describe con una función $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)$. La relación constitutiva establece que el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ que el observador puede medir verifica una ecuación de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}, t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)) \ . \tag{1}$$

Siendo $\mathcal{F}$ un funcional cuya expresión dejamos de momento sin especificar. Ahora consideramos un segundo observador que estudia también el movimiento y la deformación del mismo cuerpo. Aunque existen clases más generales de observadores, sólo vamos a considerar aquellos que preservan las distancias, ángulos e intervalos de tiempo. Es decir, aquellos para los cuales la deformación que hemos llamado $\boldsymbol{\varphi}$ se describe con una nueva función

$$\boldsymbol{\varphi}^{+}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) \ , \tag{2}$$

siendo $\boldsymbol{c}$ una función vectorial que depende únicamente del tiempo y $\boldsymbol{Q}(t)$ una función tensorial que depende del tiempo y cuyo resultado es siempre un tensor ortogonal.

Para este segundo observador, la la tensión en el punto de observación ya no vale $\boldsymbol{\sigma}$, respectivamente, sino que toma un valor distintos que denominamos $\boldsymbol{\sigma}^{+}$ y cuyo valor, calculado mediante un sencillo cambio de coordenadas, es igual a

$$\boldsymbol{\sigma}^{+} = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{Q}(t)^{T} \ . \tag{3}$$

El principio de invariancia, enunciado anteriormente, establece que la relación funcional que existe entre la tensión y la deformación vistas por el observador móvil ha de ser exactamente (1), es decir,

$$\boldsymbol{\sigma}^{+}(\boldsymbol{X}, t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}^{+}(\boldsymbol{X}, t)) \ . \tag{4}$$

Hay que resaltar que la deformación que el cuerpo sufre es la misma siempre, sólo que los observadores, cuya posición relativa cambia con el tiempo, la perciben de manera distinta.

Empleando la expresión (3) en (4) concluimos que un modelo constitutivo $\mathcal{F}(\cdot)$ es invariante u objetivo respecto a cambios de observador si verifica la igualdad:

$$\boxed{\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}, t)\boldsymbol{Q}(t)^{T} = \mathcal{F}(\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) + \boldsymbol{c}(t))} \tag{5}$$

En el movimiento observado los gradientes de deformación que cada uno de los observadores calcula son, respectivamente:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) = \mathrm{GRAD}\, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) \ , \qquad \boldsymbol{F}^{+}(\boldsymbol{X}, t) = \mathrm{GRAD}\, \boldsymbol{\varphi}^{+}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) \ . \tag{6}$$

Así pues, en el caso más sencillo de un modelo constitutivo de un material elástico simple, éste es invariante si cumple la relación

$$\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}, t)\boldsymbol{Q}(t)^{T} = \mathcal{F}(\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t)) \tag{7}$$

Igual que hemos obtenido la regla de transformación del gradiente de deformaciones, se puede obtener también la transformación de cualquier otra medida cinemática. Por ejemplo, el tensor de Green-Lagrange que el observador móvil calcula resulta:

$$\boldsymbol{E}^+ = \tfrac{1}{2}((\boldsymbol{F}^+)^T \boldsymbol{F}^+ - \boldsymbol{1}) = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}) = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}) = \boldsymbol{E} \ , \tag{8}$$

es decir, que los dos observadores perciben el mismo tensor de Green-Lagrange. Por otro lado, si el primer observador describe el tensor de tensiones de Cauchy mediante un tensor $\boldsymbol{\sigma}$, éste se representará, según el segundo observador como $\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{Q}^T$. Examinemos ahora las consecuencias que el principio de invariancia tiene en algunos modelos constitutivos.

1. Considérese la ley constitutiva $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbb{C}\ \mathrm{GRAD}\,(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t))$, siendo $\mathbb{C}$ un tensor constante de cuarto orden. Si el cuerpo se somete a una deformación $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)$, un primer observador calcularía el tensor de tensiones de Cauchy como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}, t) = \mathbb{C}\ \mathrm{GRAD}\, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) = \mathbb{C}\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) \ . \tag{9}$$

Un segundo observador que se mueve de forma que describe la deformación del cuerpo según (2), percibe la tensión $\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{Q}^T$ y el gradiente de deformaciones $\boldsymbol{F}^+ = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}$. Sin embargo, según la ley constitutiva planteada

$$\boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{X}, t) = \mathbb{C}\ \mathrm{GRAD}\,(\boldsymbol{\varphi}^+(\boldsymbol{X}, t) = \mathbb{C}\ \boldsymbol{F}^+(\boldsymbol{X}, t) = \mathbb{C}\ \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) \ , \tag{10}$$

que no coincide con lo esperado. Se puede concluir que la ley constitutiva propuesta no verifica el principio de invariancia y por lo tanto no puede ser válida.

2. Se propone una segunda ley constitutiva de la forma:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t)\ \mathbb{C}\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t)^T \ , \tag{11}$$

siendo $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi})$ el tensor de Green-Lagrange asociado a la deformación $\boldsymbol{\varphi}$. Un primer observador calcula la tensión de Cauchy como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{F}\ \mathbb{C}\ \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{F}^T \ . \tag{12}$$

Ahora bien, un segundo observador calcula el campo de tensiones también según (11) y obtiene

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{F}^+\ \mathbb{C}\ \boldsymbol{E}^+\ (\boldsymbol{F}^+)^T = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\ \mathbb{C}\ \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{Q}^T \ , \tag{13}$$

por lo que cumple la condición de objetividad.