INGENIERÍA GEOLÓGICA: MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Ignacio Romero — 20 de Septiembre de 2004

Notación indicial

En Mecánica de Medios Continuos los objetos matemáticos más empleados son los escalares, vectores y tensores en $\mathbb{R}^3$. Para trabajar con vectores se define una base de vectores ortonormales $\mathcal{B}^1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ de forma que todo vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como la siguiente combinación lineal

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 \ . \tag{1}$$

Utilizando sumatorios se puede escribir la ecuación previa de una forma más compacta:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{p=1}^{3} v_p\boldsymbol{e}_p \ . \tag{2}$$

Sin embargo es tedioso tener que escribir constantemente el símbolo de sumatorio e indicar sus límites, pues siempre son los mismos. Por ello se adopta la siguiente convención: en vez de (1) o (2) se escribe

$$\boldsymbol{v} = v_p\boldsymbol{e}_p \ . \tag{3}$$

En esta expresión, y en toda aquella en la que dos objetos que se multiplican tengan un mismo índice repetido, se entenderá que $v_p\boldsymbol{e}_p$ significa $v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$. En vez del subíndice p se podría haber empleado cualquier otro, y así

$$v_p\boldsymbol{e}_p = v_q\boldsymbol{e}_q = v_i\boldsymbol{e}_i \ , \tag{4}$$

por lo que el índice repetido se denomina *mudo*. Se dice que la expresión (3) emplea notación indicial o también el convenio de Einstein.

Dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son iguales si $a_p\boldsymbol{e}_p = b_p\boldsymbol{e}_p$. Esta igualdad se puede reescribir como $(a_p - b_p)\boldsymbol{e}_p = 0$. Como los vectores de la base son linealmente independientes la última expresión requiere que cada componente se anule, es decir, $a_p - b_p = 0$, o de otra manera

$$a_p = b_p \ . \tag{5}$$

De este simple ejemplo se deduce que cuando en una igualdad aparezca un mismo índice en varios lugares, pero no multiplicándose, quiere decir que la igualdad es válida cuando el índice toma el valor 1,2 ó 3. Un índice de este tipo se denomina *libre* y puede intercambiarse por otra letra cualquiera, siempre que no se emplee en otra parte de la igualdad. Por ejemplo, la identidad (5) quiere expressar

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \tag{6}$$

Nótese que en la identidad anterior (5) *no hay ningún índice mudo*, pues aunque p aparezca en ambos lados de la igualdad las componentes correspondientes no están multiplicando.

Cuando se trabaja con tensores de segundo orden también se emplea una base tensorial de nueve tensores:

$$\mathcal{B}^2 = \{\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3\} \ , \tag{7}$$

y todo tensor $\boldsymbol{T}$ se puede escribir como

$$\boldsymbol{T} = T_{11}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + T_{12}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + T_{13}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + T_{21}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \dots \tag{8}$$

En este caso se observa aún más claramente que resulta muy tedioso escribir y trabajar con las nueve componentes de un tensor. Se podría escribir la expresión previa como

$$\boldsymbol{T} = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} T_{pq}\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q \ , \tag{9}$$

pero igual que con los vectores, se adopta la convención de que esta última expresión se puede escribir simplemente como

$$\boldsymbol{T} = T_{pq}\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q \ . \tag{10}$$

Como en el caso de los vectores, los índices repetidos cuyos objetos correspondientes se multiplican expresan un sumatorio, con dicho índice tomando valores 1,2 y 3.

También como en el caso de los vectores, aquellos índices libres que aparecen repetidos en varios lugares de una igualdad, pero cuyas componentes correspondientes no se multiplican indican que la igualdad es válida cuando los índices toman valores 1,2 y 3. Así por ejemplo $T_{ij} + R_{ij} = 7$ quiere decir que la suma de cualquier componente del tensor $\boldsymbol{T}$ de segundo order más la misma componente del tensor de segundo orden $\boldsymbol{R}$ es igual a 7.

Las consideraciones aquí presentadas son válidas también para tensores de mayor orden. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} A_{ijk}v_j &= A_{i1k}v_1 + A_{i2k}v_2 + A_{i3k}v_3 \ , \\ S_{pqr}T_{ir} &= S_{pq1}T_{i1} + S_{pq2}T_{i2} + S_{pq3}T_{i3} \ . \end{aligned} \tag{11}$$

Empleo de notación indicial en igualdades

Cuando se expresan igualdades de cantidades vectoriales o tensoriales se puede emplear notación compacta, indicial o matricial. De esta manera, por ejemplo, la igualdad de dos tensores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se puede indicar de cualquiera de estas tres maneras:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \ , \qquad \Leftrightarrow \qquad A_{ij} = B_{ij} \ , \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \ .$$

Sin embargo **no es correcto** escribir:

$$\boldsymbol{A} = B_{ij} \ , \qquad \text{ni} \qquad A_{ij} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \ , \qquad \text{ni tampoco} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \ .$$

Otro ejemplo: si el vector $\boldsymbol{t}$ viene definido por $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma n}$ donde $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor de segundo orden $\boldsymbol{n}$ un vector, entonces podemos reescribir dicha definición de cualquiera de estas maneras:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \ ,$$

$$t_i \boldsymbol{e}_i = \sigma_{ij} n_j \boldsymbol{e}_i \ ,$$

$$\{\boldsymbol{t}\} = [\boldsymbol{\sigma}]\{\boldsymbol{n}\} \ ,$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \ .$$

Sin embargo, es incorrecto escribir:

$$\boldsymbol{t} = \sigma_{ij} n_j \ , \qquad \text{y también} \qquad \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \ .$$

Cuadro resumen

En el siguiente cuadro se resumen las operaciones más comunes en álgebra y cálculo tensorial y sus expresiones en notación indicial. En toda la tabla ϕ es una función escalar, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ son vectores y $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$ son tensores de orden dos.

Operación	**Notación tensorial**	**Notación indicial**
Igualdad de vectores	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$	$a_p = b_p$
Igualdad de tensores	$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}$	$T_{pq} = S_{pq}$
Delta de Kronecker	$\begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	δ_{ij}
Tensor de permutación	$\begin{cases} 1 & \text{si } ijk = 123, 231 \text{ ó } 321 \\ -1 & \text{si } ijk = 213, 132 \text{ ó } 312 \\ 0 & \text{si hay algún índice repetido.} \end{cases}$	ϵ_{ijk}
Producto escalar	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	$a_p b_p$
Producto vectorial	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$	$a_i = \epsilon_{ipq} b_p c_q$
Suma de vectores	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$	$a_i = b_i + c_i$
Suma de tensores	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}$	$R_{ij} = S_{ij} + T_{ij}$
Producto tensor, vector	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a}$	$b_i = T_{ip} a_p$
Producto tensor trans., vector	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{a}$	$b_i = T_{pi} a_p$
Producto tensor, tensor	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T}$	$R_{ij} = S_{ip} T_{pj}$
Producto externo	$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$	$T_{ij} = a_i b_j$
Doble contracción	$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{T}$	$S_{pq} T_{pq}$
Traza de un tensor	$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})$	T_{pp}
Determinante	$\det(\boldsymbol{T})$	$\epsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$
Gradiente de f. escalar	$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,[\phi]$	$a_i = \phi_{,i}$
Gradiente de f. vector	$\boldsymbol{T} = \mathrm{grad}\,[\boldsymbol{a}]$	$T_{ij} = a_{i,j}$
Divergencia de un vector	$\phi = \mathrm{div}\,[\boldsymbol{a}]$	$\phi = a_{i,i}$
Divergencia de un tensor	$\boldsymbol{a} = \mathrm{div}\,[\boldsymbol{T}]$	$a_i = T_{ip,p}$
Rotacional de un vector	$\boldsymbol{b} = \mathrm{rot}\,[\boldsymbol{a}]$	$b_i = \epsilon_{ijk} a_{j,k}$

Resumen de reglas prácticas de operación indicial

1) Un índice, por ejemplo p, repetido en una multiplicación, indica un sumatorio $\sum_{p=1}^{3}$ de los términos en la multiplicación:

$$a_p b_p = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ .$$

2) El par de índices repetidos y multiplicándose se pueden cambiar de letra, siempre que no se utilice en otra parte de la expresión:

$$a_p b_p + c_k = a_q b_q + c_k = a_r b_r + c_k \ .$$

3) Cuando uno de los índices repetidos en una multiplicación pertenece al una delta de Kronecker basta con reemplazar el índice repetido por el índice libre en la delta:

$$a_{ip} \delta_{pj} = a_{ij} \ .$$

4) Un índice que está repetido, pero no entre los factores que se multiplican, no se sustituye por un sumatorio

$$b_i + c_i \neq b_1 + c_1 + b_2 + c_2 + b_3 + c_3 \ .$$

5) Uno o más índices libres (que no están multiplicados por otros factores que tengan esos mismos índices) indican 3 ecuaciones independientes por cada índice:

$$v_i = a_i + 3 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = a_1 + 3 \\ v_2 = a_2 + 3 \\ v_3 = a_3 + 3 \end{cases}$$

6) Un índice **nunca** puede aparecer repetido más de una vez en una multiplicación. Puede aparecer más de dos veces si es en sumandos distintos, pero no es recomendable pues puede llevar a confusión:

$v_i S_{pi} W_{ji} \Rightarrow$ Incorrecto !!

$v_i S_{pi} W_{jk} + a_i b_i \Rightarrow$ Correcto, pero no recomendable

$v_i S_{pi} W_{jk} + a_m b_m \Rightarrow$ Correcto

7) Un tensor ortogonal es aquel que tiene la propiedad $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \mathbf{1}$. En índices:

$$A_{ip} A_{jp} = A_{pi} A_{pj} = \delta_{ij}$$